

Основы теории открытых квантовых систем II.

Лекция 5. Точно решаемые ГКСЛ уравнения, возникающие при усреднении по классическим случайным процессам

Теретёнков Александр Евгеньевич

7 марта 2023 г.

В прошлом семестре...

В результате усреднения по пуассоновскому случайному процессу получался ГКСЛ-генератор

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(U\rho U^\dagger - \rho), \quad \lambda \geq 0,$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В общем случае можно рассматривать сложный Пуассоновский процесс, тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = \int_{\Omega} \lambda(dp) (U_p \rho U_p^\dagger - \rho), \quad \lambda(dp) \geq 0,$$

$$U_p = e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H_p \mathbf{a}},$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \int_{\Omega} \lambda(dp) (U_p^\dagger \hat{X} U_p - \hat{X}).$$

Лемма. Пусть $H = H^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда

$$e^{\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a}} \mathbf{a} e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a}} = S \mathbf{a}, \quad S = e^{iJH}.$$

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a}) = \int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) \otimes_{m=1}^M \mathbf{a}, \quad S_p = e^{iJH_p}.$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть

$$U_p = e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H_p \mathbf{a}},$$

где $H_p = H_p^T = \tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ — непрерывная функция и $\langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_0 < \infty$, тогда:

Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_t = \exp \left(\int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) t \right) \langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_0,$$

где $S_p = e^{iJH_p}$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_t \equiv \text{tr} (\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathbf{a})$, $I_{(2n)^M}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^M}$.

Доказательство: Уравнение ГКСЛ в представлении Гейзенберга для оператора $\hat{X}_t = (\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t = \int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным уравнением относительно операторно-значного тензора $(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t$. Тогда решение может быть представлено посредством матричной экспоненты от $(2n)^M \times (2n)^M$ -матрицы $\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t$, а именно

$$(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t = e^{\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t} (\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_0.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. □

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В частности, для первых и вторых моментов имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} \rangle_t &= e^{\int \lambda(dp)(S_p - I_{2n})t} \langle \mathbf{a} \rangle_0, \\ \langle \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \rangle_t &= e^{\int \lambda(dp)(S_p \otimes S_p - I_{4n^2})t} \langle \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \rangle_0.\end{aligned}$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Замечание. Можно проверить, что такая динамика не переводит гауссовские состояния в гауссовские. Это пример, когда динамика моментов (и как мы увидим далее и корреляционных функций) считается в более явном виде, нежели динамика матрицы плотности.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

По обобщённой регрессионной формуле для упорядоченных по времени корреляционных функций $t_M \geq \dots \geq t_1$:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{a}_{j_M}(t_M) \dots \mathbf{a}_{j_1}(t_1) \rangle \equiv \\ & \equiv \text{tr} (\mathbf{a}_{j_M} \exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1})) \dots \mathbf{a}_{j_2} \exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1)) \mathbf{a}_{j_1} \exp(\mathcal{L}t_1) \rho_0) \end{aligned}$$

Лемма. (Переход в представление Гейзенберга)

$$\begin{aligned} & \text{tr} (\mathbf{a}_{j_M} \exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1})) \dots \mathbf{a}_{j_2} \exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1)) \mathbf{a}_{j_1} \exp(\mathcal{L}t_1) \rho_0) = \\ & = \text{tr} \rho_0 e^{\mathcal{L}^* t_1} ((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1)) ((\dots \exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1})) \mathbf{a}_{j_M} \dots) \mathbf{a}_{j_2})) \mathbf{a}_{j_1}). \end{aligned}$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Если определить

$$L_{M,m} \equiv \int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{r=1}^m S_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}, \quad m = 1, \dots, M,$$

то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\langle \mathbf{a}(t_M) \otimes \dots \otimes \mathbf{a}(t_1) \rangle = \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \dots \exp(L_{M,M}t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_0.$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

$$\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a}_{j_M} = (\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a})_{j_M}.$$

$$\begin{aligned} & \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a}_{j_M})\mathbf{a}_{j_{M-1}}) = \\ & = \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a})_{j_M}\mathbf{a}_{j_{M-1}}) = \\ & = \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a}) \otimes \mathbf{a})_{j_M j_{M-1}} = \\ & = \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})_{j_M j_{M-1}} = \\ & = (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1})) \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}))_{j_M j_{M-1}} = \\ & = (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1})) \exp(L_{2,2}(t_M - t_{M-2}))\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})_{j_M j_{M-1}}. \end{aligned}$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Аналогично,

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{L}^* t_1) & ((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1)) ((\dots \exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1})) \mathbf{a}_{j_M} \dots) \mathbf{a}_{j_2})) \mathbf{a}_{j_1}) = \\ & = \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \dots \exp(L_{M,M} t_1) \otimes_{m=1}^M \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. □

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Упражнение. Вычислите $\langle \mathfrak{a}(t_2) \otimes \mathfrak{a}(t_1) \rangle$ при $t_2 < t_1$.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. (Фермионный случай) Пусть

$$U_p = \exp(-(i/2)\mathfrak{c}^T H_p \mathfrak{c}), \quad H_p = -H_p^T = -\tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

тогда

1) Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t = \exp\left(\int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{m=1}^M O_p - I_{(2n)^M})t\right) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_0,$$

где $O_p = \exp(-iEH_p)$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t \equiv \text{tr}(\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c})$, $I_{(2n)^m}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^m}$.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

2) Если определить

$L_{M,m} \equiv \int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{r=1}^m O_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}, m = 1, \dots, M,$
то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{c}(t_M) \otimes \dots \otimes \mathbf{c}(t_1) \rangle = \\ & = \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \dots \exp(L_{M,M}t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathbf{c} \rangle_0, \end{aligned}$$

где $t_M \geq \dots \geq t_1 \geq 0$.

Генераторы диффузионного типа

Утверждение. Пусть матрицы плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\hat{C}_j, [\hat{C}_j, \rho]],$$

где $\hat{C}_j = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T K_j \mathbf{a}$, $K_j = K_j^T = \tilde{K}_j \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $\langle \otimes_{l=1}^m \mathbf{a} \rangle_0 < \infty$, тогда динамика моментов имеет вид:

$$\langle \otimes_{l=1}^m \mathbf{a} \rangle_t = \exp\left(-\frac{t}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i,p=1}^m \otimes_{l=1}^m (JK_j)^{\delta_{il} + \delta_{pl}}\right) \langle \otimes_{l=1}^m \mathbf{a} \rangle_0.$$

Квадратичный генератор

Вновь вернёмся к квадратичному генератору

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho) \equiv -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

Определим

$$B \equiv J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right), \quad \varphi \equiv iJf, \quad \Xi \equiv J\Gamma^T J$$

Мы будем использовать нижние индексы $\mathbf{a}$, φ , Ξ , чтобы обозначить номер тензорного сомножителя, которому он соответствует. Например,

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_1 \varphi_2 \equiv \mathbf{a} \otimes \varphi, \quad \Xi_{12} \mathbf{a}_3 \equiv \Xi \otimes \mathbf{a}$$

и т. д. Более того, мы будем обозначать $\mathbf{a}_{\{1,2,3\}} \equiv \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$.

Уравнения для произвольных моментов

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho_t)$ и $\langle \mathbf{a}_I \rangle_0 < \infty$ для всех наборов индексов I , тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}_I \rangle_t = & \left(\sum_{k \in I} B_k(t) \right) \langle \mathbf{a}_I \rangle_t \\ & + \sum_{k \in I} \varphi_k(t) \langle \mathbf{a}_{I \setminus \{k\}} \rangle_t + \sum_{p \in P(I)} \Xi_p(t) \langle \mathbf{a}_{I \setminus p} \rangle_t, \end{aligned}$$

где $P(I)$ — множество всех возможных пар индексов из I , упорядоченных по возрастанию.

Динамика произвольных моментов

Пусть $G(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}G(t) = B(t)G(t), \quad G(0) = I_{2n},$$

и

$$\psi(t) = \int_0^t d\tau (G(\tau))^{-1} \varphi(\tau), \quad \beta_p(t) = \int_0^t d\tau (G_p(\tau))^{-1} \Xi_p(\tau),$$

где p — пара индексов (упорядоченных по возрастанию).

Динамика произвольных моментов

Как и ранее мы будем использовать нижний индекс k для $\psi_k(t)$ и $G_k(t)$ для обозначения номера тензорного сомножителя.

И, аналогично, для множество-значных мы определим

$$\begin{aligned}\psi_I(t) &\equiv \prod_{k \in I} \psi_k(t), & G_I(t) &\equiv \prod_{k \in I} G_k(t), \\ \beta_I(t) &\equiv \sum_{I=p_1 \sqcup \dots \sqcup p_{|I|/2}} \beta_{p_1}(t) \dots \beta_{p_{|I|/2}}(t),\end{aligned}$$

где последняя сумма пробегает все возможные спаривания индексов из I , если $|I|$ — чётная, и равна нулю для нечётной $|I|$.

Динамика произвольных моментов

Утверждение.

$$\langle \mathbf{a}_I \rangle_t = G_I(t) \sum_{I=I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3} \psi_{I_1}(t) \beta_{I_2}(t) \langle \mathbf{a}_{I_3} \rangle_0,$$

где сумма пробегает все возможные разложения I на объединения трёх непересекающихся множеств I_1, I_2, I_3 .

Примеры

Рассмотрим несколько частных случаев.

Для $I = \{1\}$ имеем

$$\langle \mathbf{a}_1 \rangle_t = G_1(t)(\langle \mathbf{a}_1 \rangle_0 + \psi_1(t))$$

Для $I = \{1,2\}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_{12}(t) \rangle = & G_{12}(t)(\langle \mathbf{a}_{12} \rangle_0 + \psi_1(t)\langle \mathbf{a}_2 \rangle_0) \\ & + \psi_2(t)\langle \mathbf{a}_1 \rangle_0 + \psi_1(t)\psi_2(t) + \beta_{12}(t). \end{aligned}$$

Примеры

Для матрицы вторых центральных моментов

$$D_{12}(t) \equiv \langle \mathbf{a}_{12} \rangle_t - \langle \mathbf{a}_1 \rangle_t \langle \mathbf{a}_2 \rangle_t,$$

имеем

$$D_{12}(t) = G_{12}(t)(D_{12}(0) + \beta_{12}(t)).$$

Примеры

Пусть (для простоты) $\varphi = 0$, тогда

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}_{1234} \rangle_t = & G_{1234}(t) (\langle \mathbf{a}_{1234} \rangle_0 + \langle \mathbf{a}_{12} \rangle_0 \beta_{34}(t) + \langle \mathbf{a}_{13} \rangle_0 \beta_{24}(t) \\ & + \langle \mathbf{a}_{14} \rangle_0 \beta_{23}(t) + \beta_{12}(t) \beta_{34}(t) + \beta_{13}(0) \beta_{24}(t) + \beta_{13}(0) \beta_{24}(t)),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}_{1234} \rangle_t - \langle \mathbf{a}_{12} \rangle_t \langle \mathbf{a}_{34} \rangle_t = & G_{1234}(t) (\langle \mathbf{a}_{1234} \rangle_0 - \langle \mathbf{a}_{12} \rangle_0 \langle \mathbf{a}_{34} \rangle_0 \\ & + \langle \mathbf{a}_{13} \rangle_0 \beta_{24}(t) + \langle \mathbf{a}_{14} \rangle_0 \beta_{23}(t) + \beta_{13}(0) \beta_{24}(t) + \beta_{13}(0) \beta_{24}(t)).\end{aligned}$$

В частности, данный тензор содержит члены вида $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle - \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle$, описывающие корреляции интенсивностей электромагнитного поля.

Постоянные коэффициенты

В случае постоянных коэффициентов, имеем

$$\begin{aligned}G(t) &= e^{Bt}, \\ \psi(t) &= \int_0^t d\tau e^{-B\tau} \varphi = \frac{1 - e^{-Bt}}{B} \varphi, \\ \beta_{12}(t) &= \int_0^t d\tau e^{-(B_1+B_2)\tau} \Xi_{12} = \frac{1 - e^{-(B_1+B_2)t}}{B_1 + B_2} \Xi_{12}.\end{aligned}$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}_1 \rangle_t &= e^{B_1 t} \langle \mathbf{a}_1 \rangle_0 + \frac{e^{B_1 t} - 1}{B_1} \varphi, \\ D_{12}(t) &= e^{(B_1+B_2)t} D_{12}(0) + \frac{e^{(B_1+B_2)t} - 1}{B_1 + B_2} \beta_{12},\end{aligned}$$

Усреднение динамики с квадратичным генератором по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(e^{\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}}\rho_t - \rho_t), \quad \lambda > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}_I \rangle_t = & \lambda((G_I(1) - 1)\langle \mathbf{a}_I \rangle_t \\ & + G_I(1) \sum_{I=I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3, I_3 \neq I} \psi_{I_1}(1)\beta_{I_2}(1)\langle \mathbf{a}_{I_3} \rangle_t), \end{aligned}$$

где $G_I(t)$, $\psi_{I_1}(1)$, $\beta_{I_2}(1)$ определены формулами для случая постоянных коэффициентов.