

Лекция 3

M — сепараб. Б. пространство,

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$\xi: \Omega \rightarrow M$ — с.в., $D\xi = \mu_\xi \in \mathcal{P}(M)$

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — независ. с.в. $\Omega \rightarrow M$, гауссовы —
 левые кас. ξ , т.е. $D\xi_j = \mu_\xi \forall j$.

$F: M \rightarrow M$ — лок. лнн. отображение.

$CD\xi:$

$$(1) \quad x_{n+1}^w = F(x_n^w) + \xi_n^w, \quad n \geq 0,$$

$$(2) \quad x_0 \in V \in M$$

$\{x_n(v), n \geq 0\}$ — решение (1), (2).

Здесь V не зависит от всех ξ_j . Возможно, $V = \text{const}$
 $\mu_n = D(x_n) \in \mathcal{P}(M)$, $n \geq 0$

$$(3) \quad \boxed{\mu_{n+1} = (F \circ \mu_n) * \mu_\xi}, \quad n \geq 0.$$

Т.е. динамика мер μ_n линейна, и зависит
 только от F, μ_ξ и $D(v) = \mu_v$.

По (1), $\forall N \in \mathbb{N}$ имеем непрерыв.
 отображение
 $G^N: M \times M^N \rightarrow M,$

$$\text{т.е.} \quad x_N^w(v) = G^N(v^w, \xi_0^w, \dots, \xi_{N-1}^w)$$

(4) $x_N^w(v) = G^N(v^w, \xi_0^w, \dots, \xi_{N-1}^w)$
 Значит, μ_N — образ меры $D(v) =: \nu$ при

отображении

$$\mathcal{P}(M) \ni \nu \mapsto G^N_*(\nu * \mu_\xi^N) =: S_N^*(\nu),$$

$$\text{т.е.} \quad \mu_N^* = \mu_\xi * \mu_\xi * \dots * \mu_\xi \quad (N \text{ раз}) \in \mathcal{P}(M^N).$$

Операторы $\{S_N^*, n \geq 0\}$ образуют полугруппу операторов.

Пересовная вероятность

$\xi, \alpha_n(v), n \geq 0$ — решение (1), (2), $v \in M$ по-существу.
 $\Sigma_n(v) \in \mathcal{P}(M)$, $\Sigma_n(v) = \mathcal{D}(\alpha_n(v)) = S_n(\delta_v)$. Это —
 пересовная вероятность для уравнения (1).
 $\Sigma: M_0 \times M \rightarrow \mathcal{P}(M)$.
 Т.к. $\mathcal{D}(v) = \delta_v$, то $\Sigma_n(v) = S_n^*(\delta_v)$.

В силу (4)

$$(5) \quad \Sigma_n(v) = \mathcal{D}(G^n(v, \vec{\xi}^n)) = G^n(v, \cdot) \circ (\mu_{\vec{\xi}^n}^{\times n})$$

Таким образом $\Sigma_n(v) = \mathcal{D} \alpha_n(v)$, то для любой $f \in C_b(M)$,
 (6) $E f(\alpha_n(v)) = \int f(u) \Sigma_n(v) du, v = const$

Пусть v — с.в., $\mathcal{D}v =: \mathcal{D} \in \mathcal{P}(M)$. Возьмем
 любую $\varphi \in C_b(M)$. В силу (4),
 $E \varphi(\alpha_n^w(v)) = E \varphi(G^n(v, \vec{\xi}^n))$, $\vec{\xi}^n = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$.

Тогда $\mathcal{D} \vec{\xi}^n = (\mu_{\xi_0}^{\times n} \times \dots \times \mu_{\xi_{n-1}}^{\times n}) =: \mu^{\vec{\xi}^n} \in \mathcal{P}(M^n)$.

Так как v и $\vec{\xi}^n$ независимы, то

$$E \varphi(\alpha_n(v)) = \int \varphi(G^n(v, \vec{\xi})) \mathcal{D}(dv) \mu^{\vec{\xi}^n}(\mathcal{D} \vec{\xi})$$

Это лемма 1.1, примененная к

$$\eta = (v, \vec{\xi}^n) \text{ и } f = \varphi \circ G^n: M \times M^n \rightarrow \mathbb{R}$$

["замена меры" — от меры P , к мере $\mathcal{D}(dv) \times \mu^{\vec{\xi}^n}(\mathcal{D} \vec{\xi})$.
 по Фубини,

$$E \varphi(\alpha_n(v)) = \int_M \left[\int \varphi[G^n(v, \vec{\xi})] \mu^{\vec{\xi}^n}(\mathcal{D} \vec{\xi}) \mathcal{D}(dv) \right]$$

Лемма 1.1
 ("замена меры мерой
 в интеграле")

$$\int \varphi(u) \underbrace{(G^n(v, \cdot) \circ \mu^{\vec{\xi}^n})}_{\Sigma_n(v)}(du) \quad (5)$$

Итак, если $\mathcal{D}(v) = \mathcal{D}$,

$$(7) \quad E \varphi(\alpha_n(v)) = \int_M \left[\int \varphi(u) \Sigma_n(v)(du) \right] \mathcal{D}(dv)$$

Теорема 1. Если $D(\nu) = \nu$, то для

(определено)

$n = 0, 1, \dots$,

$$(8) \quad D(\alpha_n(\nu)) = S_n^x(\nu) = \int \sum_n(\nu) \nu(d\nu) \in P(M)$$

меры в пр. смысле (8) имеют тот же смысл: если $Q \in B$, то

$$(*) \quad \left(\int \sum_n(\nu) \nu(d\nu) \right) (Q) = \int \left[\int \sum_n(\nu) (Q) \right] \nu(d\nu).$$

Задача 1. Проверьте, что это соотношение задаёт меру из $P(M)$.
Доказательство. Достаточно показать,

что для любой $\varphi \in C(M)$ её интеграл по мерам в (8) совпадает. Интеграл от φ по мере слева — это

$$E\varphi(\alpha_n(\nu)) \quad \text{в силу леммы 1.1.}$$

А интеграл от φ по мере справа, в формуле (*),

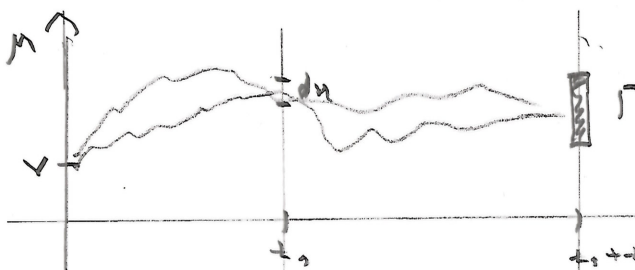
$$\int \left[\int \sum_n(\nu) (d\nu) \varphi(u) \right] \nu(d\nu).$$

Они равны в формуле (*). □

Соотношение Черныш-Ноландовского.

Теорема 2. Для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0$, $\forall \Gamma \in M$
и любого борелевского множества

$$(9) \quad \sum_{t_1+t_2}(\nu)(\Gamma) = \int_M \sum_{t_2}(u)(\Gamma) \left(\sum_{t_1}(\nu)(du) \right)$$



тогда посылка в Γ
при $t = t_1 + t_2$, в по-
лном $t = t_1$ она зависит
только от значений процесса
на интервале $[u, u+du]$.
Это и значит
смысл (9).

Доказ. левая часть (9) равна

$$S_{t_1+t_2}^* (\delta_v) (\Gamma) = S_{t_2}^* \circ S_{t_1}^* (\delta_v) (\Gamma) =$$

$$= S_{t_2}^* \left(\sum_{t_1} (v) \right) (\Gamma) = \int_M \sum_{t_2} (v) (\Gamma) \sum_{t_1} (v) (d\mu).$$

Мы получили (9). $\square$

Пусть $f \in C_b(M)$. Интегрируя f относительно меры σ (9) и используя (8) получаем:

$$(10) \quad \mathbb{E} f(x_{t_1+t_2}(v)) = \int_M \left[\mathbb{E} f(x_{t_2}(w)) \right] \sum_{t_1} (v) d\mu.$$

Это — эв. формула соответствия И-К.

Согласно (8), (10) означают, что $\{x_n(v), n \geq 0\}$, $v \in M$ — марковский процесс в M с дискретным временем. См., например, [В] Вентцель, "Курс теории случайных процессов"

Задача 2. Докажите, что $\{x_n(v), n = 0, 1, \dots\}$, $v \in M$ — семейство марковских процессов в смысле [В] или [ГС].

[ГС] Гихман, Скороход, "Введение в теорию слуг. процессов"

где даны следующие (1), (2) ?

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $V(x)$ — лоск. линейное в. поле на $\mathbb{R}^n$. Предположим,

что $\forall v$ v решение уравнения

$$(11) \quad \dot{x}(t) = V(x(t)), \quad x(0) = v$$

существует $\forall t \geq 0$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — нез. монот. с.б. $\xi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$D(\xi_j) = \mu_{\xi_j} \in P(\mathbb{R}^n) \quad \forall j.$$

Зададимся T, T_0 и

рассмотрим "матрицу" $\delta_{Tj}(t)$:

$$(12) \quad \dot{x}(t) = V(x(t)) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{Tj}(t) \xi_j, \quad t \geq 0.$$

$$(13) \quad x(0) = v$$

$$u^w(t)$$

$\forall w, u^w(\cdot)$ — обобщенная функция от t (сумма δ -функций в точках $T_j, j \in \mathbb{N}$)

а) Пусть $0 \leq t < T, u^w(t) = 0$. Тогда

при $0 \leq t < T, x(t)$ — решение (11).

$$x(T+\epsilon) = x(T-\epsilon) :$$

б) Рассмотрим скачок

$$x^w(T+\epsilon) - x^w(T-\epsilon) = \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} V(x^w(t)) dt + \xi_1^w$$

Переход к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, учитывая что

$$\lim_{t \rightarrow T} x(t) = \lim_{t \rightarrow T} x(t) = \xi_1^w$$

т.е. при $t=T, u^w(t)$ принимаем мгновенный скачок, равный ξ_1^w .

При $t=T$ мы можем задать $x(T)$ как угодно. Обозначим тогда

$$x(T) = \lim_{t \rightarrow T} x(t)$$

" $x(T)$ непрерывна справа". Обозначим

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto x(T), \quad \text{где } x(t) \text{ — р-м. (11).}$$

Тогда

$$x(T) = F(v) + \xi_1.$$

Равно так же

$$x(2T) = F(x(T)) + \xi_2^w, \quad \text{etc.}$$

Т.е.,

$$x((n+1)T) = F(x(nT)) + \xi_{n+1},$$

$$x(0) = v$$

или полученный интервал (1), (2). в $\mathbb{R}^n$.

Чем отличаются уравнения (12)?

Заданы в другом.

Пусть с.в. ξ таковы, что

$$\xi^N = (\xi^1, \dots, \xi^N), \quad \xi^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

с.в. η_j независимы, и

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbb{E} \xi^j = 0, & \mathbb{E} (\xi^j)^2 = \sigma_j^2 > 0. \quad \forall j. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (12) с $T \ll 1$, и масштабируем шаг η :

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v(x(t)) + \sqrt{T} \sum_{j=1}^N S_{Tj}(t) \xi_j \\ x(0) = v. \end{cases}$$

Что происходит с решением (14) при $T \rightarrow 0$?

Пусть $\beta_1(t), \dots, \beta_N(t)$ — независимые

стандартизованные броуновские движения.

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x}_j(t) = v_j(x(t)) + \sigma_j \frac{d}{dt} \beta_j(t), & t \geq 0 \\ x(0) = v \end{cases}$$

Теорема. Пусть задана (15) ^{такова, что} для $\epsilon > 0$

существует решение $x(t)$ и для $\epsilon > 0$ ^{и для некоторого} $\mathbb{E} |x(t)|^2 < \infty$ $\forall t$ и выполнено условие

регулярности. Пусть $x_T(t)$ — решение (14). Тогда $D x_T(t) \xrightarrow{T \rightarrow 0} D x(t), \quad \forall t \geq 0.$