Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 6. Предел слабой связи

Теретёнков Александр Евгеньевич

14 марта 2023 г.

Предел слабой связи

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)], \qquad H_I(t) \equiv e^{i(H_S+H_B)t} H_I e^{-i(H_S+H_B)t}$$

$$H_I = \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha, \quad A_\alpha^\dagger = A_\alpha, \quad B_\alpha^\dagger = B_\alpha$$

$$H_S = \sum_\varepsilon \varepsilon \Pi(\varepsilon)$$

Предел слабой связи

Тогда введём

$$A_\alpha(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \omega} \Pi(\varepsilon) A_\alpha \Pi(\varepsilon')$$

Разложение

$$A_\alpha = \sum_\omega A_\alpha(\omega)$$

есть ни что иное как разложение оператора A_α по собственным операторам супероператора $[H_S, \cdot]$. Действительно

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Предел слабой связи

$$e^{iH_S t} A_\alpha(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$$

$$B_\alpha(t) \equiv e^{iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t}$$

Предел слабой связи

Наложим условие

$$\langle B_\alpha(t)\rangle = 0$$

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \equiv \int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s}\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s)\rangle$$

и разложим

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) + iS_{\alpha\beta}(\omega, t),$$

$$S_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2i}(\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) - \Gamma^*_{\beta\alpha}(\omega, t)), \quad \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma^*_{\beta\alpha}(\omega, t)$$

Предел слабой связи

В представлении взаимодействия:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t))$$

Гамильтониан Лэмбовского и Штарковского сдвигов:

$$H_{LS}(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(\omega,t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

Диссипатор

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \left(A_{\beta}(\omega)\rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2}\{A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S\} \right)$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)]$$

$$\rho(t) = \rho(0) - i\int_0^t [H_I(s), \rho(s)]ds$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(0) - i\int_0^t [H_I(s), \rho(s)]ds]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\,\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho(0) - i\int_0^t [H_I(s), \rho(s)]ds]$$

Если предположить $\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho(0)] = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^t \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]]ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

1) Приближение Борна:

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^t \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

2) Приближение Маркова:

$$\rho_S(s) \approx \rho_S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^t \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

— уравнение Редфильда (Redfield).
Преобразуем:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^t \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

3) Приближение Борна-Маркова (не независимое от предыдущих приближений):

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

Преобразуем:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B(H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B H_I(t) - \\ - H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B)ds + \mathrm{h.c.}$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$H_I(t) = \sum_{\alpha,\omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \otimes B_\alpha(t) = \sum_{\alpha,\omega} e^{i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\alpha^\dagger(t)$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B(H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B H_I(t))ds =$$

$$= \sum_{\beta,\omega} \sum_{\alpha,\omega'} \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B(e^{-i\omega(t-s)} A_\beta(\omega) \otimes B_\beta(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B e^{i\omega' t} A_\alpha^\dagger(\omega') \otimes B_\alpha^\dagger(t))ds =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\omega',\omega} e^{i(\omega'-\omega)t} A_\beta(\omega)\rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega') \underbrace{\int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s} \, \mathrm{Tr}_B \, B_\beta(t-s)\rho_B B_\alpha^\dagger(t)}_{\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)}$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B(H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t)\otimes\rho_B)ds =$$

$$= \sum_{\beta,\omega}\sum_{\alpha,\omega'}\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_B(e^{i\omega' t}A_\alpha^\dagger(\omega')\otimes B_\alpha^\dagger(t)e^{-i\omega(t-s)}A_\beta(\omega)\otimes B_\beta(t-s)\rho_S(t)\otimes\rho_B)ds =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\omega',\omega} e^{i(\omega'-\omega)t}A_\alpha^\dagger(\omega')A_\beta(\omega)\rho_S(t)\underbrace{\int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s}\,\mathrm{Tr}_B\, B_\alpha^\dagger(t)B_\beta(t-s)\rho_B}_{\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta,\omega',\omega} e^{i(\omega'-\omega)t}\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)(A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega')-A_\alpha^\dagger(\omega')A_\beta(\omega)\rho_S(t))+\mathrm{h.c.}$$

Предел слабой связи: физический вывод

4) Секулярное приближение:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)(A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t)) + \text{h.c.}$$

Преобразуем:

$$\left(\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega)\right)^\dagger = \sum_{\alpha,\beta} \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}(t,\omega)A_\alpha(\omega)\rho_S(t)A_\beta^\dagger(\omega) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}(t,\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega)$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) + \text{h.c.} = \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{(\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) + \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}(t,\omega))}_{\gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)} A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega)$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(t,\omega)\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) + iS_{\alpha\beta}(t,\omega) \right) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega)\rho_S(t)$$

$$\left(\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega)\rho_S(t) \right)^\dagger = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) - iS_{\alpha\beta}(t,\omega) \right) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega)$$

$$H_{LS} = \sum_\omega \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega)$$

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_\omega \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) \left(A_\beta(\omega)\rho_S A_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2}\{A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega), \rho_S\} \right)$$

$\square$

Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t} \rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B$$

Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t}\rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(t) B_j(t-s)\rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0)\rho_B$$

Действительно,

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(t) B_j(t-s)\rho_B = \mathrm{Tr}_B\, e^{iH_B t} B_k^\dagger e^{-iH_B t} e^{iH_B(t-s)} B_j e^{-iH_B(t-s)}\rho_B =$$
$$= \mathrm{Tr}_B\, e^{iH_B s} B_k^\dagger e^{-iH_B s} B_j \rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0)\rho_B$$

Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t}\rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(t) B_j(t-s)\rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0)\rho_B$$

Действительно,

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(t) B_j(t-s)\rho_B = \mathrm{Tr}_B\, e^{iH_B t} B_k^\dagger e^{-iH_B t} e^{iH_B(t-s)} B_j e^{-iH_B(t-s)}\rho_B =$$
$$= \mathrm{Tr}_B\, e^{iH_B s} B_k^\dagger e^{-iH_B s} B_j \rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0)\rho_B$$

И $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ не зависят от времени.

Пример

2-уровневая система:

$$H_S = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$$

Напомним, что $A_\alpha(\omega)$ определялись как разложение A_α по собственным операторам супероператора $[H_S, \cdot]$:

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Ясно, что спектр боровских частот состоит из 3 чисел $0, \pm\omega_0$ с собственными операторами:

$$[H_S, \sigma_\pm] = -(\mp\omega_0)\sigma_\pm, \qquad [H_S, \sigma_+\sigma_-] = 0, [H_S, I] = 0$$

Пример

Таким образом,

$$A_\alpha(\mp\omega_0) \sim \sigma_\pm, \qquad A_\alpha(0) \sim \sigma_z + \mathrm{const}$$

Таким образом, общий вид уравнения ГКСЛ для двухуровневой системы в пределе слабой связи, определяется:

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma(\omega_0)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right) +$$
$$+ \gamma(-\omega_0)\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_-\sigma_+\right) +$$
$$+ \gamma(0)(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho)$$

$$H_{LS} = \Delta\omega\sigma_+\sigma_-$$

Переход в представление Шредингера

В случае 2-уровневой системы мы уже видели, что

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Приводите, к тому, что

$$e^{-i[H_S,\,\cdot\,]t}\mathcal{D}e^{i[H_S,\,\cdot\,]t} = \mathcal{D}$$

$$e^{-i[H_S,\,\cdot\,]t}[H_{LS},\ \cdot\,]e^{i[H_S,\,\cdot\,]t} = [H_{LS},\ \cdot\,]$$

Поэтому переход в представление Шредингера осуществляется просто посредством замены $H_{LS} \to H_S + H_{LS}$