

$B$  —  $B$  пространство,  $\xi: \Omega \rightarrow B$  — с.в.,  
 $D\xi = \mu_\xi \in P(M)$ .  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независ.  
 попарно  $\xi$ ,  $F: B \rightarrow B$  — лок. линейное

$$(1) x_{n+1}^\omega = F(x_n^\omega) + \xi_n^\omega, \quad n \geq 0$$

$$(2) x_0 = v \in B.$$

Удобнее:  $\sum x_n(v)$ ,  $n \geq 0$  — решение (1), (2)

Предложение 1. Пусть  $B$  — банахово пространство

в  $B$ . Тогда для любого  $n \in \mathbb{N}_0$  функция

$$B \ni v \mapsto \sum_n(v) \text{ (Q)}$$

измерима. (Доказательство или ссылка на хорошее  
 зок. дан позже).

$$S_n^*: P(B) \rightarrow P(B), \quad D(v) \mapsto D \sum_n(v), \quad n \geq 0$$

$$\sum_n(v) = D(x_n(v)), \quad v = \text{const}$$

$$S_n^*(v) = \int_B \sum_n(v) d(\mu_n)$$

$$\Sigma: \mathbb{N}_0 \times B \rightarrow P(B) \text{ — переходная вероятность для (1)}$$

Пример 1)  $V(x)$  — лок. лнн. векторное поле

на  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(3)

Считаем, что решение  $\exists!$   $\forall t \geq 0$   
 $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_j, j \geq 1$  — нез. копии  $\xi$ .

$$\dot{x}(t) = V(x(t)) + \sum_{j=1}^{\infty} S_{T_j}(t) \xi_j, \quad t \geq 0.$$

Уравнение  
 движения

$$\text{Пусть } F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(t) \mapsto x(T),$$

где  $x(t)$  — решение (3). Тогда

$$\{x_n := x(nT)\} \text{ удовлетв (1) с } B = \mathbb{R}^n.$$

2) Пусть  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $B = H^m(S^1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .  
 Задача (3) на уравнение Бургера:

(Б)  $u_t + ux = ux - uux$ ,  $u(0, x) = u_0(x) \in B$ .  
 Возникает  $S_t : B \rightarrow B$ ,  $u_0(x) \mapsto u(t) \in B$

Пусть  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow B$  — с.в., и  $\xi \in \xi_j, j \geq 1$   
 — её разложим. Рассмотрим уравнение

(Б) с искомым:  
 $u = ux - uux + \sum_{j=1}^{\infty} S_{T_j}(u) \xi_j(x)$ .

Тогда  $\{x_n := u(nT, \cdot)\}$  удовлетворяет (1)  
 $\subset B = H^m$ ,  $F = S_T$ .

Главная задача — изучать устойчивость мер  
 $\mu_n(v) = \omega(x_n(v)) \in \mathcal{P}(B)$

### Пространство мер.

[KS] Koksiz, Shchikyan, "Mathematics of two-dimensional turbulence".  
 Раздел 1.2.3

$M$  — метрическое пространство (н.в.),  
 $B = B(M)$ ,  $\mathcal{P}(M)$ ,  $C_B(M)$ .  
 $f \in C_B(M)$ ,  $\|f\|_{\infty} = \sup_{u \in M} |f(u)|$

Слабая сходимость мер  $\mu_n \rightarrow \mu$

$\in B(M)$ , если  $\forall f \in C_B(M)$ ,

(4)  $\langle \mu_n, f \rangle := \int_M f(u) d\mu_n(u) \rightarrow \langle \mu, f \rangle$

Жаковен имену мер  $\xi \mu_n$ ,  $n \geq 1$   $\subset \mathcal{P}(M)$   
 тесной ("tight"), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  компактный  
 $K \subset M$ , что  
 $\mu_n(K) > 1 - \varepsilon \quad \forall n$

Теорема 1 (Троцкий). Пусть  $M$  - полусфера  $n$ -го.

Семейство мер,  $\{\mu_n\}$  предельнослабым в слабой топологии  $\mathcal{P}(M) \Leftrightarrow$  Эта система тесная.

Пример. Пусть  $\mu_n = \mu \forall n$ . Эта система равномерно предельнослаба. Поэтому она тесная. Поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in M$ , что  $\mathcal{P}(K) \supset 1 - \varepsilon$ . Берем более широкий класс:

Теорема 2 (Улам). Пусть  $M$  - компактно, тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in M$ , что  $Q \in \mathcal{P}(M)$ . Тогда  $\mu(K) > \mu(Q) - \varepsilon$ .

$(\mu \in \mathcal{P}(M) \text{ и })$

«является компактно предельнослабым»

Задача 1. В условиях Теоремы 2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  открытое множество  $U \supset Q$ , что  $\mu(U) \leq \mu(Q) + \varepsilon$ .

Вот мы только предположили, что пространство  $M$  компактно.

Варианты рассуждений

(1) рассуждения по типу Варианта.

Для  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$ ,

$$(5) \quad \|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = \frac{1}{2} \sup_{f \in C_b(M)} |\langle f, \mu_1 \rangle - \langle f, \mu_2 \rangle|$$

$\|f\|_\infty \leq 1$

Теорема 3.

$$(6) \quad \|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = \sup_{\Gamma \in \mathcal{B}} |\mu_1(\Gamma) - \mu_2(\Gamma)|$$

Теорема 4. Если  $M = \mathbb{R}^n$  и  $\mu_1 = \rho_1(x) dx$ ,  $\mu_2 = \rho_2(x) dx$ , то

$$(7) \quad \|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_1(x) - \rho_2(x)| dx = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \min(\rho_1(x), \rho_2(x)) dx$$

Задача 2. Показать, что  $i) \Leftrightarrow ii)$

Определение. 1) Если  $\mu \in \mathcal{P}(M)$ , то  $\text{supp } \mu$  — множество  $M$  такое, что  $\mu(M \setminus \text{supp } \mu) = 0$ .

2) Меры  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$  взаимно сингулярны,  $\mu_1 \perp \mu_2$ , если  $\exists Q \subset \mathcal{B}(M)$ , что  $\mu_1(Q) = 0, \mu_2(M \setminus Q) = 0$ .

Вывод! Это не означает, что  $\text{supp } \mu_1 \cap \text{supp } \mu_2 = \emptyset$ .

Задача 3. Показать, что  $\text{supp } \mu$  существует  $\forall \mu$ .

Задача 4. Пусть  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$ , и  $P: M \rightarrow M$  — измеримое отображение. Тогда  $\|P\mu_1 - P\mu_2\|_{\text{var}} \leq \| \mu_1 - \mu_2 \|_{\text{var}}$ .

Теорема 5 („лемма Доджсона“). Пусть где меры  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$  допускают представление  $\mu_j = (1-\delta)\mu + \delta\nu_j$ , где  $\delta = \|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{var}}$  и  $\nu_1 \perp \nu_2$ .

Задача 5 Показать эту теорему, если  $\mu_1, \mu_2$  такие, как в Теореме 4.

Следствие.  $\mu_1 \perp \mu_2 \Leftrightarrow \|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{var}} = 1$ .

Замечание. Рассмотрим  $m = \mu_1 - \mu_2$ . Это

— „мера“, т.е. не обязательно неотрицательная.

По Теореме 5,  $\exists Q \in \mathcal{B}$  и меры  $m_1, m_2$ , что

$m_j(M) \leq 1$ , что  $m = m_1 - m_2, m_1(Q) = 0, m_2(M \setminus Q) = 0$ .

Это — „разложение Флордана-Хана  
мера  $m$ “

-4.5-

Сходимость по бор. рассматривается иначе  
сильная: если семейство  $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(M)$  такое, что

$$\|\mu_n - \mu\|_{var} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ то по (4) } \mu_n \rightarrow \mu.$$

Но не наоборот:

Пример. 1) Пусть  $\{x_n\}$  — послед-ство  $\in M$  такое, что  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . Тогда, очевидно,  $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_x$ ,  
т.е. для  $f \in C_b(M)$

$$\langle f, \delta_{x_n} \rangle = f(x_n) \rightarrow f(x) = \langle f, \delta_x \rangle.$$

Но, взяв  $\mathcal{B}(S)$   $\Gamma = \{x\}$ , имеем

$$\|\delta_{x_n} - \delta_x\|_{var} = 1 \quad \forall n.$$

2) Пример  $\mu_n = \delta_{x_n}$ ,  $\mu = \delta_x$  и  $\Gamma = \{x\}$ .  
Показывает, что сходимость  $\mu_n \rightarrow \mu$   
не влечёт, что  $\mu_n(\Gamma) \rightarrow \mu(\Gamma)$  для  
любого замкнутого множества  $\Gamma$ .  
Значит это не верно и для любого  
открытого  $\Gamma$ . (Почему?)

### Липшиц - фрейшветная метрика.

Пусть  $L_b(M)$  — пространство

$$L_b(M) = \{f \in C_b(M) : \text{Lip } f < \infty\}$$

с нормой

$$\|f\|_L = \|f\|_\infty + \text{Lip } f.$$

Задача 6. Пусть  $M = [0, 1]$  с обычной мет-  
стикой. Докажите, что  $L_b[0, 1]$  не сепараб.

Очевидно, что  $\mathcal{P}(M) \subset L_b(M)^*$ , т.е.  
любая мера  $\mu$  задаёт непрерывный  
функционал  $L_b(M) \ni f \mapsto \langle f, \mu \rangle$

Определение, Для  $\mu_1, \mu_2 \in P(M)$ ,

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_L^* = \sup_{\substack{f \in L_b(M) \\ \|f\|_L \leq 1}} |\langle f, \mu_1 \rangle - \langle f, \mu_2 \rangle|.$$

Это - миним-гвейсмановское расстояние между  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Оно равно расстоянию между  $\mu_1, \mu_2$  по норме  $L_b(M)^*$ .

Конечно,

$$(8) \quad (P(M), \|\cdot\|_L^*) -$$

это метрическое пространство. Какое оно?

Задача 7. Для простоты пусть  $M = [0, 1]$ . Докажите, что пространство (8) сепарабельное.

Подсказка. Для фиксированной  $q, h \in \mathbb{N}_0$  рассмотрим конечные совокупности пер

$$M_h^q = \left\{ \sum_{m=0}^h \frac{p_m}{q} \delta_{m/h} : p_m \in \mathbb{N}_0, p_m \leq q, \sum_m \frac{p_m}{q} = 1 \right\}$$

на объединение по всем  $q$  и  $h$  плотно и

плотно в (8). (П. Канторович)

Теорема 6 1) Пространство (8) полное

и сепарабельное (т.е. польское).

2) Последовательность  $\{\mu_n\} \subset P(M)$

сходится к  $\mu$  по норме (8) тогда и только тогда, когда  $\mu_n \rightarrow \mu$ .

I) 22 и 23 ~~марта~~ марта, с 17:00,  
проф. В.И. Богачёв прочтёт в РУДН  
лекцию „Задачи Монстера и Канторовского...“  
Эта лекция связана с сегодняшней  
лекцией. Справки у Юлии Белаяковой

II) Следующие 5 лекций, <sup>№ 4-9,</sup> прочтёт  
А. Д. Демин.

Лекция № 10, 28 апреля прочтёт г.  
Лекция № 11, 5 мая - французская,  
про Задачу.