

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.А.Слоущ

по совместной работе с Т.А.Суслиной

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ изучается самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2p$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g(x/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad b(\mathbf{D}) := \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta, \quad \mathbf{D} = -i\nabla.$$

Здесь $g(x)$ — ограниченная и равномерно положительно определенная $(m \times m)$ -матрица-функция в $\mathbb{R}^d$; предполагается, что матрица-функция $g(x)$ периодична с некоторой решеткой периодов Γ . Оператор $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$ -матричный ДО порядка p . Предполагается, что $m \geq n$ и символ $b(\xi) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \xi^\beta$ имеет ранг n при всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ — сильно эллиптический.

Получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$:

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \sum_{j=1}^{2p-1} \varepsilon^j \mathcal{K}_{j,\varepsilon} + O(\varepsilon^{2p}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами, а операторы $\mathcal{K}_{j,\varepsilon}$, $j = 1, \dots, 2p-1$, — подходящие корректоры. Эффективный оператор и корректоры определяются в терминах решений вспомогательных краевых задач на ячейке решетки Γ . При этом $\|\mathcal{K}_{j,\varepsilon}\|_{L_2 \rightarrow L_2} = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$; корректоры $\mathcal{K}_{j,\varepsilon}$, $j = 1, \dots, p-1$, не зависят от ε .

Метод исследования представляет собой дальнейшее развитие теоретико-операторного подхода, предложенного М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной.