

Группы Γ_n^4 , косы и 3-многообразия

В.О. Мантуров

Семинар С.П.Новикова и В.М.Бухштабера, Москва, МГУ
22.03.2023

V.O.Manturov, I.M.Nikonov, <https://arxiv.org/abs/2303.04423>;

Я чрезвычайно благодарен И.М.Никонову за вычисление основного примера. <https://arxiv.org/abs/2303.04423>

Я благодарен Л.Х.Кауфману, В.Г.Тураеву и Е.А.Мудрой за вдохновляющие обсуждения.

Я благодарен Н.Д.Шапошнику за помощь в создании текста и картинок.

Цель:

Наша цель — показать, что: Методы, используемые при построении инвариантов 3- многообразий, могут быть использованы при построении инвариантов кос

Цель:

Наша цель — показать, что: Методы, используемые при построении инвариантов 3- многообразий, могут быть использованы при построении инвариантов кос и

Наша цель — показать, что: Методы, используемые при построении инвариантов 3- многообразий, могут быть использованы при построении инвариантов кос и методы, используемые при построении инвариантов кос, могут быть использованы при построении инвариантов 3-многообразий.

Гаммы: триангуляции двумерных поверхностей, Птолемей

Множество триангуляций четырехугольника (без дополнительных вершин) — **две точки**; множество триангуляций пятиугольника — **пять точек**; множество триангуляций шестиугольника — **четырнадцать точек**: 2, 5, 14 — числа Каталана.
Эти множества достраиваются до отрезка, пятиугольника, ассоциаэдра.

Гаммы: триангуляции двумерных поверхностей, Птолемей

Множество триангуляций четырехугольника (без дополнительных вершин) — **две точки**; множество триангуляций пятиугольника — **пять точек**; множество триангуляций шестиугольника — **четырнадцать точек**: 2, 5, 14 — числа Каталана.

Эти множества достраиваются до отрезка, пятиугольника, ассоциаэдра.

Топологические структуры пространств, связанных с триангуляциями, известны (Капранов-Воеводский, Гельфанд-Капранов-Зелевинский, Фомин-Зелевинский).

Гаммы: триангуляции двумерных поверхностей, Птолемей

Множество триангуляций четырехугольника (без дополнительных вершин) — **две точки**; множество триангуляций пятиугольника — **пять точек**; множество триангуляций шестиугольника — **четырнадцать точек**: $2, 5, 14$ — числа Каталана.

Эти множества достраиваются до отрезка, пятиугольника, ассоциаэдра.

Топологические структуры пространств, связанных с триангуляциями, известны (Капранов-Воеводский, Гельфанд-Капранов-Зелевинский, Фомин-Зелевинский).

При этом все “просмотрели” структуру группы.

С.В.Фомин и А.В. Зелевинский Кластерные алгебры: колчаны, мутации, флипы.



Аналогичные картинки должны быть и у групп гамма!

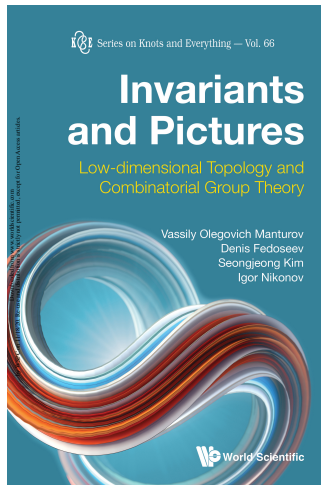
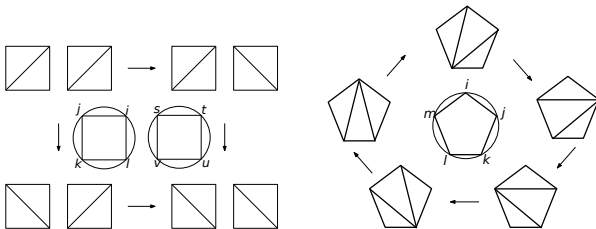


Рис.: Книга “Инварианты и картинки”

Определение

Группа Γ_n^4 задается порождающими $\{d_{(ijkl)} \mid \{i, j, k, l\} \subset \bar{n}, |\{i, j, k, l\}| = 4\}$ и соотношениями:

- 1 $d_{(ijkl)}^2 = 1$ for $(i, j, k, l) \subset \bar{n}$,
- 2 $d_{(ijkl)} d_{(stuv)} = d_{(stuv)} d_{(ijkl)}$, for $|\{i, j, k, l\} \cap \{s, t, u, v\}| < 3$,
- 3 $d_{(ijkl)} d_{(ijlm)} d_{(jklm)} d_{(ijkm)} d_{(iklm)} = 1$ для различных i, j, k, l, m .
- 4 $d_{(ijkl)} = d_{(jilk)} = d_{(klij)} = d_{(kjil)} = d_{(iljk)} = d_{(jkl i)} = d_{(lkji)} = d_{(lij k)}$ для различных i, j, k, l .



Откуда происходят группы Γ ?

Мы рассматриваем косу: n попарно различных точек движутся по плоскости (или по двумерной поверхности). Они образуют диаграмму Вороного и двойственное ей разбиение (триангуляцию) Делоне; когда они движутся в общем положении, мы записываем образующие, соответствующие *флипам*. Таким образом, для каждой косы мы получаем слово.

Откуда происходят группы Γ ?

Мы рассматриваем косу: n попарно различных точек движутся по плоскости (или по двумерной поверхности). Они образуют диаграмму Вороного и двойственное ей разбиение (триангуляцию) Делоне; когда они движутся в общем положении, мы записываем образующие, соответствующие *флипам*. Таким образом, для каждой косы мы получаем слово.

Соотношения из групп Γ таковы, что изотопным косам соответствуют равные слова!

Откуда происходят группы Γ ?

Мы рассматриваем косу: n попарно различных точек движутся по плоскости (или по двумерной поверхности). Они образуют диаграмму Вороного и двойственное ей разбиение (триангуляцию) Делоне; когда они движутся в общем положении, мы записываем образующие, соответствующие *флипам*. Таким образом, для каждой косы мы получаем слово.

Соотношения из групп Γ таковы, что изотопным косам соответствуют равные слова!

Известный факт: Соотношение пятиугольника (см. далее) приводит к действию групп кос на меченых триангуляциях (на каждом ребре стоит многочлен Лорана). Как мы увидим,

Откуда происходят группы Γ ?

Мы рассматриваем косу: n попарно различных точек движутся по плоскости (или по двумерной поверхности). Они образуют диаграмму Вороного и двойственное ей разбиение (триангуляцию) Делоне; когда они движутся в общем положении, мы записываем образующие, соответствующие *флипам*. Таким образом, для каждой косы мы получаем слово.

Соотношения из групп Γ таковы, что изотопным косам соответствуют равные слова!

Известный факт: Соотношение пятиугольника (см. далее) приводит к действию групп кос на меченых триангуляциях (на каждом ребре стоит многочлен Лорана). Как мы увидим, группы Γ приводят к инвариантам 3-многообразий,

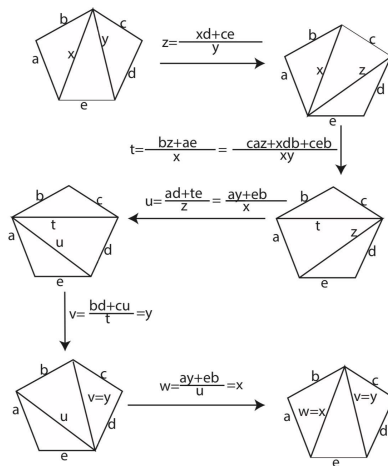
Откуда происходят группы Γ ?

Мы рассматриваем косу: n попарно различных точек движутся по плоскости (или по двумерной поверхности). Они образуют диаграмму Вороного и двойственное ей разбиение (триангуляцию) Делоне; когда они движутся в общем положении, мы записываем образующие, соответствующие *флипам*. Таким образом, для каждой косы мы получаем слово.

Соотношения из групп Γ таковы, что изотопным косам соответствуют равные слова!

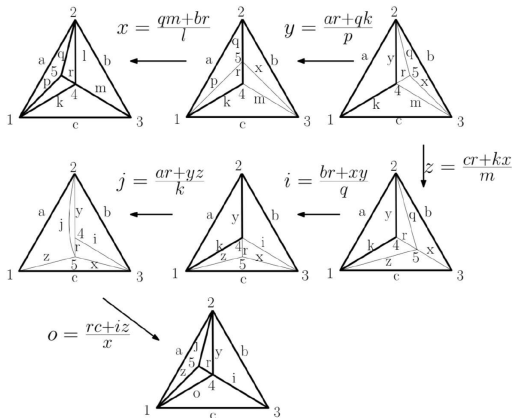
Известный факт: Соотношение пятиугольника (см. далее) приводит к действию групп кос на меченых триангуляциях (на каждом ребре стоит многочлен Лорана). Как мы увидим, группы Γ приводят к инвариантам 3-многообразий, а техника, используемая при построении инвариантов 3-многообразий, приводит к конечномерным представлениям групп Γ .

Из Птолемея следует пентагон: вычисление главного соотношения групп Γ_n^4



Пример вычисления гаммы на косах

$$x = \frac{qm + br}{l};$$



(Из теории кластерных алгебр следует, что:)

(Из теории кластерных алгебр следует, что:)

все возникающие многочлены Лорана имеют числители с положительными коэффициентами,

(Из теории кластерных алгебр следует, что:)

все возникающие многочлены Лорана имеют числители с положительными коэффициентами,

вся теория работает для произвольных полуполей,

(Из теории кластерных алгебр следует, что:)

все возникающие многочлены Лорана имеют числители с положительными коэффициентами,

вся теория работает для произвольных полуполей,

например, для тропического полуполя $a \otimes b = a + b$, $a \oplus b = \max(a, b)$,
для диагоналей треугольника получаем:
 $y = \max(a + c - x, b + d - y)$.

Каковы действия и представления у групп Γ_n^4 ?

Имеется действие группы Γ (точнее, ее “реализуемой” части, соответствующей крашеным косам) на меченых триангуляциях (на ребрах триангуляции стоят многочлены Лорана от начальных переменных).

Это похоже на **бесконечномерное** представление перестановками. А есть ли **конечномерное** представление (у которого, вообще говоря, есть элементы, отличные от 0 и 1)?

Переход от матриц перестановок к матрицам произвольного вида напоминает переход от групп к многозначным группам.

Рассмотрим крашеную косу β . Ее можно выразить посредством n попарно не пересекающихся нитей $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in (\mathbb{R}^2)^n$, $t \in [0, 1]$, где $X(0) = X(1)$. Будем считать, что β находится в общем положении. Это означает, что имеется конечное множество значений $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$, для которых при $t \neq t_k$, $k = 1, \dots, m$, никакие четыре точки из $X(t)$ не лежат на одной окружности или прямой, а множество $X(t_k)$, $k = 1, \dots, m$ содержит ровно одну четверку точек, лежащих на одной окружности (или прямой). Тогда для любого регулярного значения $t \neq t_k$ множество $X(t)$ определяет единственную триангуляцию Делоне $G(t)$. Фиксируем целое число $r \geq 3$, пусть $q = e^{\frac{i\pi}{r}} \in \mathbb{C}$.

Для регулярного значения t рассмотрим множество $F_r(t) = F_r(G(t))$ допустимых раскрасок ребер триангуляции Делоне $G(t)$, т.е. отображений $f : E(G(t)) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, таких что для любого треугольника триангуляции $G(t)$ с ребрами a, b, c имеет место:

- ❶ $f(a) + f(b) + f(c)$ чётно;
- ❷ $f(a) + f(b) \geq f(c), f(a) + f(c) \geq f(b), f(b) + f(c) \geq f(a)$;
- ❸ $f(a) + f(b) + f(c) \leq 2r - 4$.

Замена разбиения

Пусть $V_r(t)$ — линейное пространство с базисом $F_r(t)$.

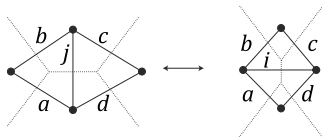


Рис.: Преобразование триангуляции Делоне

Рассмотрим регулярное значение t_k . В момент времени t_k происходит флип триангуляции (см. рис. 3). Согласно теореме о перегруппировке [2, Theorem 6.2], можно определить линейный оператор $A_r(t_k) : V_r(X(t_k - 0)) \rightarrow V_r(X(t_k + 0))$, коэффициенты которого — $q - 6j$ -символы. Более точно, триангуляции $G(t_k - 0)$ и $G(t_k + 0)$ различаются одним ребром: $j = E(G(t_k - 0)) \setminus E(G(t_k + 0))$, $i = E(G(t_k + 0)) \setminus E(G(t_k - 0))$. Пусть a, b, c, d — ребра, инцидентные тем треугольникам, которым инцидентны i и j . □

Для любого $f \in F_r(t_k - 0)$, рассмотренного как элемент базиса из $V_r(t_k - 0)$ мы положим

$$A_r(t_k)f = \sum_{g \in F_r(t_k+0): f=g|_{E(G(t_k-0)) \cap E(G(t_k+0))}} \left\{ \begin{matrix} g(a) & g(b) & g(i) \\ f(c) & f(d) & f(j) \end{matrix} \right\}_q \cdot g,$$

где $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta & \xi \\ \gamma & \delta & \eta \end{matrix} \right\}_q$ — $(q - 6j)$ -символ (определение приведено в [2, Proposition 11]).

Основная теорема (совм. с И.М.Никоновым)

Пусть $A_r(\beta) = \prod_{k=1}^m A_r(t_k) : V(X) \rightarrow V(X)$ — композиция операторов $A(t_k)$.

Теорема

Оператор $A_r(\beta)$ является инвариантом крашенных кос.

Доказательство. Рассмотрим изотопию крашенных кос β_s , $s \in [0, 1]$. Изотопия общая: имеется не более чем конечное число значений s_l , для которых β_{s_l} имеет единственное значение t^* , для которого множество $X_s(t^*)$ содержит следующие сингулярные конфигурации:

- ① пять (соседних) точек на одной окружности (или прямой);
- ② две четверки (соседних) точек, каждая из которых лежит на одной окружности. Эти окружности должны быть различны.

Первый случай приводит к соотношению пятиугольника для преобразований триангуляций Делоне (рис. 4). Отсюда следует соотношение пятиугольника для операторов $A_r(\beta)$ (теорема [2, Proposition 10]).

Доказательство: продолжение

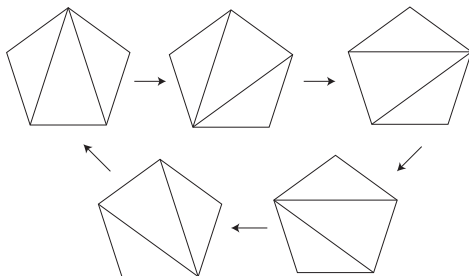


Рис.: Соотношение пятиугольника

Второй случай приводит к соотношению коммутативности $A_1 A_2 = A_2 A_1$, где A_1 , A_2 соответствует флипам для данной четверки точек. Соотношение выполняется по построению для операторов A_1 , A_2 .

Пример (И.М.Никонов)

Рассмотрим конфигурацию точек $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{3}, 0)$, $P_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_5 = (1, 0)$. Рассмотрим крашеную косу β , заданную вращением P_2 вокруг P_1 : $P_2(t) = (\frac{1}{3} \cos t, \frac{1}{3} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Получаем шесть флипов триангуляций Делоне. При $r = 4$ каждая триангуляция имеет 160 допустимых раскрасок. Оператор $A_4(\beta)$ имеет размерность 160. Он не является единичным (имеет собственное значение -1 кратности 20).

Соотношение Птолемея

Для вписанного в окружность четырехугольника имеет место соотношение: $ac + bd = xy$.

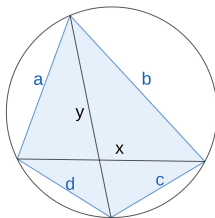


Рис.: Вписанный четырехугольник

Без знаков: перенумеруем вершины числами от 1 до 4 и сопоставим переменную x_{ij} ориентированному ребру, так что противоположному ребру сопоставляется $x_{ji} = -x_{ij}$. Тогда уравнение Птолемея имеет вид: $x_{12}x_{34} + x_{23}x_{14} + x_{13}x_{42} = 0$. Эта форма уравнения инвариантна относительно перестановки индексов $(1, 2, 3, 4)$, так что уравнение выполняется также и для самопересекающихся четырехугольников.

Соотношение Птолемея со знаками

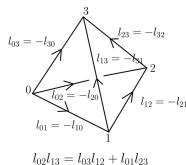


Рис.: Вписанный четырехугольник

Метка соответствует ориентированному ребру. При обращении ориентации метка меняется на противоположную.

Соотношение инвариантно относительно любой перестановки 1, 2, 3, 4 точек на окружности.

Инварианты Виро-Тураева

Рассмотрим специальный спайн и сопоставим веса истинным вершинам. Эти веса зависят от 6 параметров (они называются $(q - 6j)$ -символами).

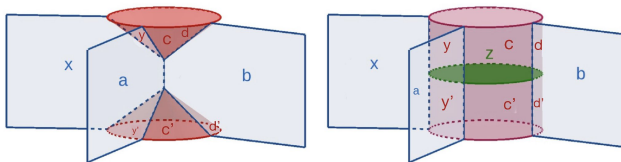


Рис.: Движение Матвеева-Пьергаллини

Из соотношения Птолемея следует тождество Биденхарна-Эллиота

Основная идея: рассмотреть вписанный пятиугольник и фиксировать его диагонали.

Из соотношения Птолемея следует тождество Биденхарна-Эллиота

Основная идея: рассмотреть вписанный пятиугольник и фиксировать его диагонали.

Мы дополним картину с вписанными 4-угольниками до пятиугольника

Из соотношения Птолемея следует тождество Биденхарна-Эллиота

Основная идея: рассмотреть вписанный пятиугольник и фиксировать его диагонали.

Мы дополним картину с вписанными 4-угольниками до пятиугольника и требуемое уравнение примет вид $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$.

Из соотношения Птолемея следует тождество Биденхарна-Эллиота

Основная идея: рассмотреть вписанный пятиугольник и фиксировать его диагонали.

Мы дополним картину с вписанными 4-угольниками до пятиугольника и требуемое уравнение примет вид $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$. Другие члены в

правой части уравнения — нулевые: суммирование берется по всем z , но лишь при одном значении z (длине пятой стороны пятиугольника) сумма ненулевая и все вписано!

Рассмотрим специальный спайн и сопоставим веса его истинным вершинам. Эти веса зависят от 6 параметров $(q - 6j)$ -символы. Используем уравнение на $(q - 6j)$ -символы. В правой части движения Матвеева-Пьергаллини мы имеем новую 2-клетку, обозначим ее через z .

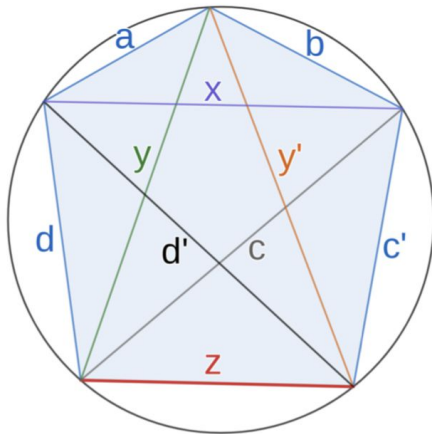
Уравнение Биденхарна-Эллиота имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & x \\ c & d & y \end{array} \right\}_q \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & x \\ c' & d' & y' \end{array} \right\}_q$$

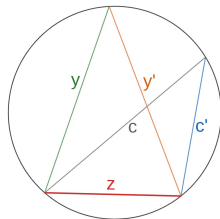
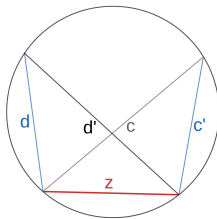
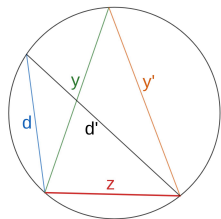
$$= \sum_z \left\{ \begin{array}{ccc} a & d & y \\ z & d' & y' \end{array} \right\}_q \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} b & y & c \\ z & y' & c' \end{array} \right\}_q \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} x & c & d \\ z & c' & d' \end{array} \right\}_q$$

В правой части мы суммируем по z .

Для любого треугольника со сторонами (a, b, x) и двух вписанных треугольников (a, b, c, d) , (a, b, c', d') с диагоналями y, y' соответственно существует единственное z , дающее три вписанных (самопересекающихся) четырехугольника.
Решение: достраиваем до пятиугольника!



Из Птолемея следует Биденхарн-Эллиот



Сопоставим вещественные переменные (ориентированным) 2-клеткам специальных спайнов. Каждой истинной вершине сопоставим соответствующий $(q - 6j)$ -символ.

Теорема

Пространство решений (модифицированной) системы уравнений Биденхарна-Эллиота по всем истинным вершинам есть алгебраическое многообразие, тип которого — инвариант исходного 3-многообразия.

Что еще?

Подход Γ_n^4 работает для кос в произвольных 2-мерных поверхностях. Следовательно, можно получать спайны 3-многообразий, которые представляют собой слоения над S^1 со слоем Σ_g .

Один отделился
и так любезно
дремотную немоту расторг:
“Ну, как вам,
Владимир Владимирович,
нравится бездна?”
И я отвечаю так же любезно:
“Прелестная бездна.
Бездна - восторг!”

Один отделился
и так любезно
дремотную немоту расторг:
“Ну, как вам,
Владимир Владимирович,
нравится бездна?”
И я отвечаю так же любезно:
“Прелестная бездна.
Бездна - восторг!”

Можно продолжить все списки бездн, возникающих при рассмотрении кластерных алгебр, до бездн, возникающих при изучении групп гамма.

Основной вопрос таков:

Основной вопрос таков: Имеется ли более глубокая связь между косами и 3-многообразиями?

Основной вопрос таков: **Имеется ли более глубокая связь между косами и 3-многообразиями?** В частности, можно ли кодировать спайны 3-многообразий динамикой (графов)?

Основной вопрос таков: **Имеется ли более глубокая связь между косами и 3-многообразиями?** В частности, можно ли кодировать спайны 3-многообразий динамикой (графов)?

Какие еще спайны 3-многообразий можно получить из *погруженных* 3-валентных графов?

Основной вопрос таков: **Имеется ли более глубокая связь между косами и 3-многообразиями?** В частности, можно ли кодировать спайны 3-многообразий динамикой (графов)?

Какие еще спайны 3-многообразий можно получить из *погруженных* 3-валентных графов?

Как описанные выше теории связаны с миром теней Кириллова и Решетихина: How are the above theories related to the shadow world of Kirillov and Reshetikhin?

Основной вопрос таков: **Имеется ли более глубокая связь между косами и 3-многообразиями?** В частности, можно ли кодировать спайны 3-многообразий динамикой (графов)?

Какие еще спайны 3-многообразий можно получить из *погруженных* 3-валентных графов?

Как описанные выше теории связаны с миром теней Кириллова и Решетихина: How are the above theories related to the shadow world of Kirillov and Reshetikhin?

Есть ли здесь функториальность? Можно ли получить инварианты 4-многообразий?

- 1 Специальные спайны и кобордизмы трехвалентных графов могут кобордизмы детских рисунков. Действуют ли косы и гаммы на детских рисунках? На комплексных структурах на римановых поверхностях?
- 2 Уравнения для старших гамм переписываются через двугранные углы тетраэдров. Есть ли действие гамм на пространствах модулей дышащих многогранников?
- 3 Ассоциаэдры и ассоциаторы Дринфельда.



V.O. Manturov, D. Fedoseev, S. Kim, I. Nikonov, *Invariants And Pictures: Low-dimensional Topology And Combinatorial Group Theory, Series On Knots And Everything* **66**, World Scientific, 2020.



L.H. Kauffman, S. Lins, Temperley–Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds, Princeton University Press, 1994.



V.O.Manturov, I.M.Nikonov, *On an invariant of pure braids*, <https://arxiv.org/abs/2303.04423>



I.M.Gelfand, M.M.Kapranov, A.V.Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, 1994.



M.M.Kapranov, V.A.Voevodsky, 2-Categories and Zamolodchikov tetrahedra equations, *AMS*, 1994.



S.V. Fomin; A.V.Zelevinsky (2002), “Cluster algebras. I. Foundations”, *Journal of the American Mathematical Society*, 15 (2): 497–529, arXiv:math/0104151, doi:10.1090/S0894-0347-01-00385-X, MR 1887642

Cluster algebras. II. Finite type classification

Cluster algebras. IV. Coefficients