

Мы знаем $m \geq 1$, такой что оператор S_m^* минимален на $\mathcal{P}(B_{R_*})$, то есть $\|S_m^* v - S_m^* v'\|_{var} \leq \gamma_m \|v - v'\|_{var}$ для некоторого $0 < \gamma_m < 1$ и всех $v, v' \in \mathcal{P}(B_{R_*})$.

По теореме Банаха получим, что $\exists! \mu \in \mathcal{P}(B_{R_*})$, т.е.

$$(1) \quad \|S_m^* \mu - \mu\| \leq \gamma_m^k.$$

Лемма 1 Выведите из (1) утверждение теоремы.

Лемма 2 Докажите, что $\forall v, v' \in \mathcal{P}(B_{R_*})$

$$\|S_n^* v - S_n^* v'\|_{var} \leq \gamma_n \|v - v'\|_{var},$$

$$(2) \quad \text{где } \gamma_n = \sup_{v, v' \in B_{R_*}} \|\Sigma_n(v) - \Sigma_n(v')\|_{var}.$$

Hint: Действуйте аналогично доказательству формулы (5.3). В ней оператор Σ заменим упомянутой правой частью из $\|v - v'\|_{var}$.

Лемма 3 Теперь остаётся доказать, что $\exists m$, для которых $\gamma_m < 1$.

Пусть $\gamma_\delta := \sup_{v, v' \in B_\delta} \|\Sigma_1(v) - \Sigma_1(v')\|_{var}.$

Лемма 3 Существует $\delta > 0$, такое что $\gamma_\delta < 1$.

Задача 4 Докажите лемму 3.

Hint: Проверьте рассуждение, аналогичное рассуждению из Примера 5.5,

где вычислялись плотности $\Sigma_1(v)$ и $\Sigma_1(v')$, а затем $\|\cdot\|_{var}$.

Используйте непрерывность ρ и неравенство $\rho(0) > 0$.

$$\Sigma_m(v) = \int \Sigma_{m-1}(v)(du) \Sigma_1(u)$$

потому что мы идём из B_{R_0}



Аналогично доказательству формулы (5.3), $\forall v, v' \in B_{R_0}$

$$\|\Sigma_m(v) - \Sigma_m(v')\|_{var} = \left\| \int \Sigma_{m-1}(v)(du) \Sigma_1(u) - \int \Sigma_{m-1}(v')(du') \Sigma_1(u') \right\|_{var}$$

$$\leq \left\| \int_{B_{R_0} \times B_{R_0}} (\Sigma_1(u) - \Sigma_1(u')) \eta_{v,v'}(du du') \right\|_{var},$$

$$\text{где } \eta_{v,v'}(du du') = \Sigma_{m-1}(v)(du) \Sigma_{m-1}(v')(du').$$

Тогда

$$\|\Sigma_m(v) - \Sigma_m(v')\|_{var} \leq \int_{B_{R_0} \times B_{R_0}} \|\Sigma_1(u) - \Sigma_1(u')\|_{var} \eta_{v,v'}(du du').$$

Пусть $X_\delta = B_\delta \times B_\delta$, где δ такое как в лемме 3. Тогда, замечая

$$\int_{B_{R_0} \times B_{R_0}} = \int_{X_\delta} + \int_{X_\delta^c}, \quad \text{находим}$$

$$\|\Sigma_m(v) - \Sigma_m(v')\|_{var} \leq \varepsilon_\delta \eta_{v,v'}(X_\delta) + \eta_{v,v'}(X_\delta^c) = 1 - (1 - \varepsilon_\delta) \eta_{v,v'}(X_\delta).$$

$$\text{Таким образом, } \delta_m \leq 1 - \inf_{v,v' \in B_{R_0}} (1 - \varepsilon_\delta) \eta_{v,v'}(X_\delta)$$

Чтобы найти m для которого $\delta_m < 1$,

достаточно найти m , для которого

$$\inf_{v,v' \in B_{R_0}} \eta_{v,v'}(X_\delta) > 0.$$



$$\text{Эквивалентно, } \inf_{v \in B_{R_0}} \Sigma_{m-1}(v)(B_\delta) > 0$$

$$\inf_{v \in B_{R_0}} P(X_{m-1}(v) \in B_\delta)$$

$$X_n^w(V) = G^n(V; Z_0^w, \dots, Z_{n-1}^w), \text{ где } G^n \text{ — непрерывный др.-суд.}$$

$$V \in \mathbb{R}_+^n$$

Свойства диссипативности отображения F влечёт, что $\forall V \in \mathbb{R}_+^n$.

$$|G^{m-1}(V; 0, \dots, 0)| \leq q^{m-1} |V| \leq \frac{\delta}{2}, \text{ если } m \text{ достаточно велико.}$$

включим шум

Заскрпирнем такое дост. большое m .

Так как G^{m-1} — непрерывна, $\exists \varepsilon > 0$, т.е.

$$|G^{m-1}(V; Z_1, \dots, Z_{m-1})| \leq \delta \text{ где } \forall V \in \mathbb{R}_+^n$$

$Z_1, \dots, Z_{m-1}$ удовлетворяющие $|Z_j| < \varepsilon$.

Следовательно, $\forall V \in \mathbb{R}_+^n$

$$P(X_{m-1}(V) \in B_\delta) \geq P(|Z_1| < \varepsilon, \dots, |Z_{m-1}| < \varepsilon) = (P(|Z_1| < \varepsilon))^{m-1} > 0,$$

так как $P(0) > 0$.

G^{m-1} действует на компакте $\mathbb{R}_+^n \times \text{supp } P \times \dots \times \text{supp } P$, а значит отсюда равномерно непрерывна.

Возвращаясь в исходную абстрактную постановку, где $x_n \in B$ — последовательность пр-ва.

$$\text{Пусть } \forall \nu \in \mathcal{P}(B), \quad S_n^* \nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu.$$

$\exists \mu \in \mathcal{P}(B)$, такая что

Вопрос: верно ли, что μ — стационарная мера?

$$\mu = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* \nu \Rightarrow S_1^* \mu = S_1^* (w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* \nu) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}^* \nu = \mu$$

предп. в смысле слабой с-ти мер

если S_1^* непр-на в слабой топологии.

То есть, $S_1^* \mu = \mu \Rightarrow S_n^* \mu = \mu \forall n$, так как S_n^* — полуср-на. Значит, μ — стационарная.