Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 8. Модель Фридрихса. Метод псевдомод

Теретёнков Александр Евгеньевич

28 марта 2023 г.

Модель Фридрихса

$$H_F = \int \omega_k |\hat{k}\rangle\langle\hat{k}| dk + \Omega|\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| + \int \left(g_k^* |\hat{k}\rangle\langle\hat{1}| + g_k |\hat{1}\rangle\langle\hat{k}|\right) dk,$$

— модель Фридрихса.

Модель Фридрихса

Утверждение. Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_F|\psi(t)\rangle \\ |\psi(0)\rangle = |\hat{1}\rangle \end{cases}$$

имеет решение

$$|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \int dk \psi_k(t)|\hat{k}\rangle,$$

где $\psi_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -i\Omega\psi_1(t) - \int_0^t d\tau G(t-\tau)\psi_1(\tau),$$

где введено обозначение $G(t) = \int dk e^{-i\omega_k t}|g_k|^2$, а $\psi_k(t)$ может быть выражено через $\psi_1(t)$ по формуле

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau).$$

Модель Фридрихса

С учтётом $|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)||\hat{1}\rangle + \int dk \psi_k(t)|\hat{k}\rangle$, имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i\int dk g_k \psi_k(t), \\ \frac{d}{dt}\psi_k(t) = -i\omega_k\psi_k(t) - ig_k^*\psi_1(t). \end{cases}$$

С учётом $\psi_k(0) = 0$, имеем

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau).$$

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - \int dk |g_k|^2 \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau)$$

Метод псевдомод

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} J(\omega).$$

$$J(\omega) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_l g_l^2}{\left(\frac{\gamma_l}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_l)^2}$$

$$G(t) = \sum_{l=1}^{n} g_l^2 e^{-\left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)t}, \quad t > 0,$$

Метод псевдомод

Утверждение. Введём неэрмитов гамильтониан в $H_{\text{eff}} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ по формуле

$$H_{\text{eff}} = \Omega|\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| + \sum_{l=1}^{n} \left(\left(\omega_l - i\frac{\gamma_l}{2} \right) |\tilde{l}\rangle\langle\tilde{l}| + g_l(|\tilde{l}\rangle\langle\hat{1}| + |\hat{1}\rangle\langle\tilde{l}|) \right)$$

тогда вектор

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \sum_{l} \varphi_l(t)|\tilde{l}\rangle,$$

где

$$\varphi_l(t) = -ig_l \int_0^t d\tau e^{-\left(\frac{\gamma_l}{2}+i\omega_l\right)(t-\tau)}\psi_1(\tau),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

Метод псевдомод

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i\sum_l g_l\varphi_l(t).$$

Кроме того, дифференцируя определение $\varphi_l(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\varphi_l(t) = -ig_l\psi_1(t) - \left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)\varphi_l(t).$$

Полученные уравнения совпадают с уравнением $\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\tilde{\psi}(t)\rangle$, расписанным покомпонентно. $\square$

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$ и матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \langle\psi| \\ |\psi\rangle & R \end{pmatrix}, \qquad \rho_{00} = 1 - \mathrm{Tr}\, R, \quad R = R^\dagger.$$

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Утверждение. Решение уравнения ГКСЛ $\rho(t)$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[0 \oplus H, \rho(t)] + \sum_{l=1}^{K} \left(L_l \rho(t) L_l^\dagger - \frac{1}{2} L_l^\dagger L_l \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_l^\dagger L_l \right),$$

где $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $(H = H^\dagger)$ и $L_l = \sqrt{\gamma_l} |0\rangle\langle l| \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$, имеет вид представленный на предыдущем слайде, где $|\psi(t)\rangle$ и $R(t)$ удовлетворяет уравнения

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\psi(t)\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = -iH_{\text{eff}}R(t) + iR(t)H_{\text{eff}}^\dagger,$$

где

$$iH_{\text{eff}} = iH + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \gamma_l |l\rangle\langle l|,$$

—аккретивная матрица.

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $|\psi(t)\rangle = 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}0 \oplus R(t) =& - i0 \oplus H_{\text{eff}} R(t) + i0 \oplus R(t) H_{\text{eff}}^{\dagger} = \\
=& - i0 \oplus [H, R(t)] - \\
& - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} 0 \oplus \gamma_l \; |l\rangle\langle l| R(t) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} 0 \oplus \gamma_l \; R(t)|l\rangle\langle l| = \\
=& - i[0 \oplus H, 0 \oplus R(t)] - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \gamma_l |l\rangle\langle 0||0\rangle\langle l| 0 \oplus R(t) - \\
& - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \gamma_l 0 \oplus R(t)|l\rangle\langle 0||0\rangle\langle l| = \\
=& - i[0 \oplus H, \rho(t)] - \frac{1}{2}\sum_{l} \left(L_l^{\dagger} L_l \rho(t) + \rho(t) L_l^{\dagger} L_l \right),
\end{aligned}
$$

где были использованы ортогональность $\langle 0|l\rangle = 0, l \neq 0$ и определение $L_l = \sqrt{\gamma_l}|0\rangle\langle l|$.

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Tr} R(t)|0\rangle\langle 0| = -\sum_l \gamma_l \langle l|R(t)|l\rangle |0\rangle\langle 0| =$$
$$= -\sum_l \gamma_l |0\rangle\langle l|0 \oplus R(t)|l\rangle\langle 0| = -\sum_l L_l \rho(t) L_l^\dagger.$$

$\square$

"Одночастичное" вторичное квантование

Определение. Рассмотрим гильбертово пространство вида $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$. Пусть, кроме того, $\mathcal{X}_i$ — вспомогательные гильбертовы пространства $\dim \mathcal{X}_i \geqslant 2$. Введём линейную инъекцию $\hat{}: \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n \to \otimes_{i=1}^n \mathcal{X}_i$, определённую на базисных векторах по правилу

$$|l\rangle \to |\hat{l}\rangle = |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_{l-1} \otimes |1\rangle_l \otimes |0\rangle_{l+1} \otimes \cdots \otimes |0\rangle_n, \qquad l \neq 0;$$
$$|0\rangle \to |\hat{0}\rangle = |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_n.$$

Такое отображение будем называть ***одночастичным вторичным квантованием***.

$$\hat{\rho} = \sum_{l,k=0}^{n} \rho_{lk} |\hat{l}\rangle\langle\hat{k}|.$$

"Одночастичное" вторичное квантование

Утверждение. Пусть a_l — произвольный набор операторов таких, что $a_l^\dagger|\hat{0}\rangle = |\hat{l}\rangle$ и $a_l|\hat{l}\rangle = |\hat{0}\rangle$. Пусть $\rho(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[0 \oplus H, \rho(t)] + \sum_{l=1}^{K} \left(L_l \rho(t) L_l^\dagger - \frac{1}{2} L_l^\dagger L_l \rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t) L_l^\dagger L_l \right),$$

с коэффициентами, определёнными в предыдущем утверждении. Тогда $\hat{\rho}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \left(a_l \hat{\rho}(t) a_l^\dagger - \frac{1}{2} a_l^\dagger a_l \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t) a_l^\dagger a_l \right),$$

$\hat{H} = \sum_{l,k=1}^{n} H_{lk} a_l^\dagger a_k$.

"Одночастичное" вторичное квантование

В физических приложениях в качестве операторов a_l чаще всего выбираются

- бозонные операторы уничтожения b_l, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениями $[b_l, b_k^\dagger] = \delta_{lk}, [b_l, b_k] = 0$,
- фермионные операторы уничтожения f_l, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениями $\{f_l, f_k^\dagger\} = \delta_{lk}, \{f_l, f_k\} = 0$,
- двухуровневые операторы уничтожения σ_l, удовлетворяющие $\{\sigma_l, \sigma_l^\dagger\} = I, \{\sigma_l, \sigma_l\} = 0, [\sigma_l, \sigma_k] = 0, [\sigma_l, \sigma_k^\dagger] = 0, l \neq k$.

Важно отметить, что не обязательно выбирать операторы одинакового типа для всех индексов.

"Одночастичное" вторичное квантование. Примеры

Для (бозонных) гауссовских состояний введём "ополовиненные" обозначения $\mu_j \equiv \mathrm{Tr} a_j \hat{\rho}$, $Y_{ij} \equiv \mathrm{Tr} a_i^\dagger a_j \hat{\rho} - \overline{\mu}_i \mu_j$, $Z_{ij} \equiv \mathrm{Tr} a_i a_j \hat{\rho} - \mu_i \mu_j$

Упражнение. Если обозначить, то $V(t) = e^{-iH_{\mathrm{eff}} t}$

$$\mu(t) = V(t)\mu(0),$$

$$Y(t) = \overline{V}(t) Y(0) V^T(t),$$

$$Z(t) = V(t) Z(0) V^T(t).$$