

# Элементарные теории абелевых групп

Н. А. Баженов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск)

11–13 апреля 2023 г.

В миникурсе будет изложено доказательство следующего классического результата.

## Теорема (В. Шмелева, 1955)

Теория абелевых групп разрешима.

### План мини-курса:

- (I) Сведение к проблеме элементарных индексов.  
Разрешимость элементарных теорий для групп  $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$  и  $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ .
- (II) Элементарная классификация полных теорий посредством инвариантов В. Шмелевой.

## Предварительные сведения из теории абелевых групп

Абелевы группы рассматриваются в сигнатуре  $\sigma_{AG} = \{=; +, -; 0\}$ .

Пусть  $H$  — абелева группа;  $H_1 \leq H$ ;  $a \in H$ .

- ▶  $H_1 + a = \{h + a : h \in H_1\}$  — это класс смежности элемента  $a$  по подгруппе  $H_1$ .
- ▶ Считаем, что индекс  $H_1$  в  $H$  (обозначается через  $[H : H_1]$ ) равен

$$\min(\omega, \text{мощность множества классов смежности по } H_1).$$

- ▶ Если  $H_2 \leq H$ , то также задаём

$$[H_1 : H_2] := [H_1 : H_1 \cap H_2].$$

## Предварительные сведения из теории абелевых групп

Если  $H_1 \leq H$  и  $H_2 \leq H$ , то  $[H_1 : H_2] = [H_1 : H_1 \cap H_2]$ .

### Лемма 1

Пусть  $H$  — абелева группа;  $H_1 \leq H$  и  $H_2 \leq H$ ;  $a \in H$ .

- (a)  $[(H_1 + H_2) : H_2] = [H_1 : H_2]$ .
- (b)  $[H : H_1] \cdot [H_1 : H_2] \geq [H : H_2]$ .
- (c) Число классов смежности по  $H_2$ , которые имеют непустое пересечение с классом  $H_1 + a$ , равно  $[H_1 : H_2]$ .

# Позитивно примитивные формулы

## Определение

Позитивно примитивной формулой (п.п.ф.) называем формулу вида

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y_1 \exists y_2 \dots \exists y_m \theta(\bar{x}, \bar{y}),$$

где  $\theta$  — это конъюнкция атомарных формул (т.е. формул вида  $t = q$  для некоторых термов  $t$  и  $q$ ).

## Лемма 2

Пусть  $\varphi(\bar{x})$  — позитивно примитивная формула;  $H$  — абелева группа;  $a_1, \dots, a_k \in H$ , где  $k < n$ .

1. Формула  $\varphi(\bar{x})$  определяет подгруппу в декартовой степени  $H^n$ .
2. Формула  $\varphi(a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  либо не выполняется в  $H$ , либо задаёт смежный класс по подгруппе  $G \leq H^{n-k}$ , такой что  $G$  определима формулой  $\varphi(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ .

# Проблема элементарных индексов

Пусть  $\varphi(x), \psi(x)$  — позитивно примитивные формулы,  $A$  — абелева группа. Будем обозначать

$$[\varphi : \psi, A] := [\varphi(A) : \psi(A)]$$

(т.е. это индекс подгруппы, определяемой  $\varphi$  в  $A$ , по подгруппе, определяемой  $\psi$ ).

## Определение

Говорят, что абелева группа  $A$  имеет *разрешимую проблему элементарных индексов*, если существует алгоритм, который по данным позитивно примитивным формулам  $\varphi(x), \psi(x)$  и данному  $n \geq 1$  определяет, верно ли

$$[\varphi : \psi, A] \geq n.$$

## Сведение к проблеме элементарных индексов

Проблема элементарных индексов: *верно ли*  $[\varphi : \psi, A] \geq n$ ?

### Предложение A

Пусть  $A$  — абелева группа. Любая формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\sigma_{AG}$  эквивалентна в  $Th(A)$  булевой комбинации  $\varphi^*(\bar{x})$  позитивно примитивных формул. Более того, если в  $A$  разрешима проблема элементарных индексов, то существует алгоритм, который по данной формуле  $\varphi$  строит  $\varphi^*$ .

### Следствие A.1

Элементарная теория  $Th(A)$  разрешима в том и только том случае, когда в группе  $A$  разрешима проблема элементарных индексов.

Проблема элементарных индексов: *верно ли*  $[\varphi : \psi, A] \geq n$ ?

## Следствие A.1

Элементарная теория  $Th(A)$  разрешима в том и только том случае, когда в группе  $A$  разрешима проблема элементарных индексов.

Доказательство.  $(\Rightarrow)$ . Условие  $[\varphi : \psi, A] \geq n$  эквивалентно следующему:

$$A \models \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left[ \bigwedge_{i \leq n} \varphi(x_i) \wedge \bigwedge_{i < j \leq n} \neg \psi(x_i - x_j) \right].$$

$(\Leftarrow)$ . Для любого терма  $t(x_1, \dots, x_k)$  верно  $t(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Следовательно, любое позитивно примитивное предложение истинно в любой абелевой группе.

В силу Предложения A по данному предложению  $\psi$  можно алгоритмически построить булеву комбинацию  $\psi^*$  позитивно примитивных предложений, такую что  $A \models \psi \leftrightarrow \psi^*$ . □

# Доказательство предложения А

## Предложение А

Любая формула  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  эквивалентна в  $Th(A)$  булевой комбинации  $\varphi^*(\bar{x})$  позитивно примитивных формул. Если в группе  $A$  разрешима проблема элементарных индексов, то существует алгоритм, который по данной  $\varphi$  строит  $\varphi^*$ .

**Доказательство.** Индукция по числу кванторов в  $\varphi$ . Ясно, что если  $\varphi$  — бескванторная, то  $\varphi$  уже эквивалентна булевой комбинации позитивно примитивных формул (п.п.ф.).

Отметим, что конъюнкция двух п.п.ф. эквивалентна п.п.ф. Следовательно, дизъюнкция отрицаний двух п.п.ф. эквивалентна отрицанию одной п.п.ф.

*Шаг индукции.* Пусть формула  $\varphi$  имеет вид  $\forall y \theta$ , где  $\theta$  — это булева комбинация п.п.ф. Приводя  $\theta$  к к.н.ф., получаем, что достаточно рассмотреть следующий случай:

$$\theta = \neg \varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n, \text{ где } \varphi_i \text{ — п.п.ф.}$$

Заметим, что формула  $\forall y \neg \varphi_0$  уже эквивалентна  $\neg \exists y \varphi_0$  (отрицанию п.п.ф.), поэтому можно считать, что  $n \geq 1$ .

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \forall y \left[ \varphi_0(\bar{x}, y) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(\bar{x}, y) \right], \text{ где } \varphi_i \text{ — п.п.ф.}$$

Пусть  $B_i$  — это подгруппа в  $A$ , определяемая формулой  $\varphi_i(\vec{0}, y)$ .

**Шаг 1:** Элиминация «больших» индексов  $[B_0 : B_i]$  для  $1 \leq i \leq n$ .

### Лемма 3

Пусть  $a_0, \dots, a_n \in A$ , при этом  $B_0 + a_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} (B_i + a_i)$  и  $[B_0 : B_n] > n!$ . Тогда

$$B_0 + a_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (B_i + a_i).$$

Другими словами, если  $[B_0 : B_n] > n!$ , то из формулы  $\varphi(\bar{x})$  можно «выкинуть» подформулу  $\varphi_n$ :

$$A \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \forall y \left[ \varphi_0(\bar{x}, y) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq n-1} \varphi_i(\bar{x}, y) \right].$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \forall y \left[ \varphi_0(\bar{x}, y) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(\bar{x}, y) \right], \text{ где } \varphi_i \text{ — п.п.ф.}$$

Группа  $B_i$  — это подгруппа в  $A$ , определяемая формулой  $\varphi_i(\vec{0}, y)$ .  
Теперь можно считать, что  $[B_0 : B_i] \leq n!$ . Пусть  $B^* := \bigcap_{0 \leq i \leq n} B_i$ .

**Шаг 2.** Для  $b_1, \dots, b_n \in A$  и  $F \subseteq \{1, \dots, n\}$  формула

$$\varphi_0(\bar{b}, y) \wedge \bigwedge_{i \in F} \varphi_i(\bar{b}, y)$$

определяет в  $A$  множество  $Z_{F, \bar{b}}$ : либо  $Z_{F, \bar{b}} = \emptyset$ , либо  $Z_{F, \bar{b}}$  содержит  $n(F) = [B_0 \cap \bigcap_{i \in F} B_i : B^*]$  смежных классов по подгруппе  $B^*$ .

Для  $S \subseteq P(\{1, 2, \dots, n\})$  зададим формулу

$$\psi^S(\bar{x}) = \left( \bigwedge_{F \in S} \exists y \bigwedge_{i \in F \cup \{0\}} \varphi_i(\bar{x}, y) \right) \wedge \left( \bigwedge_{F \in P(\{1, \dots, n\}) \setminus S} \neg \exists y \bigwedge_{i \in F \cup \{0\}} \varphi_i(\bar{x}, y) \right).$$

Другими словами, множество  $Z_{F, \bar{x}} \neq \emptyset$  в том и только том случае, когда  $F \in S$ .

Отметим, что здесь формула вида  $\exists y \bigwedge_i \varphi_i$  эквивалентна п.п.ф. Значит, формула  $\psi^S$  эквивалентна булевой комбинации п.п.ф.

## Лемма 4

Пусть  $C, A_1, \dots, A_n$  — конечные множества. Тогда

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \iff \sum_{F \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|F|} \cdot \left| C \cap \bigcap_{i \in F} A_i \right| = 0. \quad (1)$$

Здесь считаем, что  $C \cap \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = C$ .

Зададим множество

$$V = \left\{ S : S \subseteq P(\{1, 2, \dots, n\}), \sum_{F \in S} (-1)^{|F|} \cdot n(F) = 0 \right\}.$$

(1) Пусть  $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b})$ . Тогда выберем  $S_0 = \{F : Z_{F, \bar{b}} \neq \emptyset\}$ . Ясно, что  $\mathcal{A} \models \psi^{S_0}(\bar{b})$ .

Также рассмотрим:

- ▶  $C$  — (конечное) множество всех смежных классов по  $B^*$  во множестве  $\{y : \mathcal{A} \models \varphi_0(\bar{b}, y)\}$ ;
- ▶  $A_i, 1 \leq i \leq n$ , — это (возможно, пустое) множество всех смежных классов по  $B^*$  в  $\{y : \mathcal{A} \models \varphi_0(\bar{b}, y) \wedge \varphi_i(\bar{b}, y)\}$ .

Из (1: $\Rightarrow$ ) следует, что  $S_0 \in V$ .

(2) Пусть теперь  $S \in V$  и  $\mathcal{A} \models \psi^S(\bar{b})$ . Опять рассмотрим:

- ▶  $C$  — множество всех смежных классов по  $B^*$  во множестве  $\{y : \mathcal{A} \models \varphi_0(\bar{b}, y)\}$ ;
- ▶  $A_i, 1 \leq i \leq n$ , — множество всех смежных классов по  $B^*$  в  $\{y : \mathcal{A} \models \varphi_0(\bar{b}, y) \wedge \varphi_i(\bar{b}, y)\}$ .

Из  $(1:\Leftarrow)$  следует, что  $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b})$ .

$$V = \left\{ S : S \subseteq P(\{1, 2, \dots, n\}), \sum_{F \in S} (-1)^{|F|} \cdot n(F) = 0 \right\}.$$

Итак, получили, что

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{S \in V} \psi^S(\bar{x}).$$

В свою очередь, формула  $\bigvee_S \psi^S$  эквивалентна  $\varphi^*(\bar{x})$  — булевой комбинации п.п.ф.

Напомним, что  $B_i$  — это подгруппа в  $\mathcal{A}$ , определяемая п.п.ф.  $\varphi_i(\vec{0}, y)$ .

Для алгоритмического построения формулы  $\varphi^*$  достаточно уметь:

1. проверять, верно ли, что  $[B_0 : B_i] > n!$ ;
2. находить числа  $n(F) = [B_0 \cap \bigcap_{i \in F} B_i : \bigcap_{0 \leq i \leq n} B_i]$ .

Это можно делать эффективно, если проблема элементарных индексов разрешима. □