Элементарные теории абелевых групп

Н. А. Баженов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск)

11–13 апреля 2023 г.

Факты из предыдущих лекций

Абелевы группы рассматриваются в сигнатуре $\sigma_{AG} = \{=; +, -; 0\}$. Все рассматриваемые группы являются абелевыми.

Пусть G — абелева группа; $k \geq 1$; $a \in G$. Введём обозначения для следующих подгрупп:

$$kG = \{kx : x \in G\}, \quad G[k] = \{x \in G : kx = 0\}.$$

Через p и q обозначаем простые числа.

Через $\mathbb{Z}(k)$ обозначаем циклическую группу порядка k.

Запись $k \mid a$ означает, что $\exists y(ky = a)$.

Позитивно примитивные формулы

Определение

Позитивно примитивной формулой (п.п.ф.) называем формулу вида

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m \theta(\bar{x}, \bar{y}),$$

где θ — это конъюнкция атомарных формул (т.е. формул вида $t = q$ для некоторых термов t и q).

Лемма

Пусть $\varphi(\bar{x})$ — позитивно примитивная формула; A — абелева группа; $a_1, \ldots, a_k \in A$, где $k < n$.

1. Формула $\varphi(\bar{x})$ определяет подгруппу в декартовой степени A^n.
2. Формула $\varphi(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ либо не выполняется в A, либо задаёт смежный класс по подгруппе $G \leq A^{n-k}$, такой что G определима формулой $\varphi(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Проблема элементарных индексов

Пусть $\varphi(x), \psi(x)$ — позитивно примитивные формулы, A — абелева группа. Обозначаем

$$[\varphi : \psi, A] := [\varphi(A) : \psi(A)]$$

(индекс подгруппы, определимой φ в A, по подгруппе, определимой ψ).

Говорят, что абелева группа A имеет *разрешимую проблему элементарных индексов*, если существует алгоритм, который по данным позитивно примитивным формулам $\varphi(x), \psi(x)$ и данному $n \geq 1$ определяет, верно ли

$$[\varphi : \psi, A] \geq n.$$

Проблема элементарных индексов

Предложение A

Пусть A — абелева группа. Любая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ_{AG} эквивалентна в $Th(A)$ булевой комбинации $\varphi^*(\bar{x})$ позитивно примитивных формул.

Кроме того, если в A разрешима проблема элементарных индексов, то существует алгоритм, который по данной формуле φ строит φ^*.

Преобразование позитивно примитивных формул

Через T_{AG} обозначаем теорию абелевых групп.

Предложение Б

Любая позитивно примитивная формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ_{AG} эквивалентна относительно T_{AG} конечной конъюнкции формул вида

$$\exists y \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = p^k y \right) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0,$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, $k \in \omega$ и p — простое число. При этом такая конъюнкция находится эффективно.

Следствие

Любая позитивно примитивная формула $\varphi(x)$ сигнатуры σ_{AG} эквивалентна относительно T_{AG} конечной конъюнкции формул вида

$$\exists y(p^\ell x = p^k y) \quad \text{и} \quad mx = 0,$$

где $m \in \mathbb{Z}$, p — простое число и $0 \leq \ell < k$.

При этом такая конъюнкция находится эффективно.

Определение

Формулы вида $\exists y(p^\ell x = p^k y)$ (где $\ell < k$) называем *p-базисными формулами второго рода*, а формулы вида $mx = 0$ — *базисными формулами первого рода*.

Определения инвариантов Шмелевой

Пусть G — абелева группа.

Определение. Подгруппа $H \leq G$ называется *p-сервантной подгруппой* в G, если для любых $a \in H$ и $k \in \omega$ выполнено:

$$H \models (p^k \mid a) \Leftrightarrow G \models (p^k \mid a).$$

Определение Sz.1

Для $n, k \in \omega$ предложение $A_{p,n,k}$ говорит о том, что «группа G имеет p-сервантную подгруппу, изоморфную $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathbb{Z}(p^n)$».

$$\alpha_{p,n}(G) = \sup\{k \in \omega : G \models A_{p,n,k}\}.$$

Определение Sz.2

Для $n, k \in \omega$ предложение $B_{p,n,k}$ говорит о том, что «группа G имеет подгруппу, изоморфную $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathbb{Z}(p^n)$».

$$\beta_p(G) = \inf\{\sup\{k \in \omega : G \models B_{p,n,k}\} : n \in \omega\}.$$

Определения инвариантов Шмелевой

Формула $C'_{p,n,k}(x_1, \ldots, x_k)$ говорит следующее: «если рассмотреть соответствующие образы $x'_1, \ldots, x'_k$ в фактор-группе $\overline{G} = G/G[p^n]$, то смежные классы $p\overline{G} + x'_1, \ldots, p\overline{G} + x'_k$ линейно независимы (над простым полем характеристики p) в фактор-группе $\overline{G}/p\overline{G}$».

Определение Sz.3

Для $n, k \in \omega$ зададим $C_{p,n,k} = \exists x_1 \ldots \exists x_k C'_{p,n,k}(x_1, \ldots, x_k)$.

$$\gamma_p(G) = \inf\{\sup\{k \in \omega : G \models C_{p,n,k}\} : n \in \omega\}.$$

Определение Sz.4

Пусть $\varepsilon(G) \in \{0, 1\}$ и

$$\varepsilon(G) = 0 \;\Leftrightarrow\; kG = 0 \text{ для некоторого } k \geq 1,$$

т.е. порядок всех элементов группы G ограничен.

Элементарная классификация абелевых групп.

Элементарная классификация абелевых групп

Через $Sz(G) = Sz(H)$ обозначаем, что группы G и H имеют одинаковые инварианты Шмелевой.

Теорема C

Для абелевых групп G и H следующие условия эквивалентны:

(i) G и H имеют одинаковые проблемы элементарных индексов, т.е. для любых позитивно примитивных формул $\varphi(x), \psi(x)$ выполнено $[\varphi : \psi, G] = [\varphi : \psi, H]$;

(ii) G и H элементарно эквивалентны;

(iii) $Sz(G) = Sz(H)$.

Доказательство. Осталось доказать (iii)⇒(i).

Скетч доказательства (iii)⇒(i)

Дано, что $Sz(G) = Sz(H)$. Для данных п.п.ф. $\varphi(x), \psi(x)$ нужно показать, что $[\varphi : \psi, G] = [\varphi : \psi, H]$.

Далее можно считать, что:

- группы G и H счётны;
- $\varepsilon(G) = 1$, т.е. порядок элементов в группе G неограничен;
- формула $\psi(x)$ является базисной;
- $\psi(K) \subseteq \varphi(K)$ для любой группы K (при необходимости заменяем $\varphi(K)$ на $\varphi(K) \oplus \psi(K)$).

Приведём здесь доказательство только для случая, когда $\psi(x)$ есть p-базисная формула второго рода:

$$\exists y(p^\ell x = p^k y), \text{ где } \ell < k.$$

Переход к p-базисным подгруппам

Определение

Говорят, что подгруппа A группы G является *p-базисной* для G, если:

- A есть прямая сумма циклических p-групп и групп, изоморфных $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$;
- A есть p-сервантная подгруппа G;
- фактор-группа G/A p-делима, т.е. $(p \mid x)$ для каждого $x \in G/A$.

Для любой G и любого p существует p-базисная подгруппа для G.

Лемма 5

Пусть A — это p-базисная подгруппа группы G.

(a) $\alpha_{p,n}(A) = \alpha_{p,n}(G)$ и $\gamma_p(A) = \gamma_p(G)$.

(b) Пусть $\varphi(x)$ — п.п.ф., $\psi(x)$ — p-базисная формула второго рода. Тогда $[\varphi : \psi, A] = [\varphi : \psi, G]$.

Пусть A — это p-базисная подгруппа в G, B — p-базисная подгруппа в H.

В силу леммы 5 достаточно доказать, что $[\varphi : \psi, A] = [\varphi : \psi, B]$.

Для A и B можно посчитать инварианты Шмелевой.

Через $T(G)$ обозначаем периодическую часть группы G. Через $\mathcal{Z}$ обозначим группу $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$.

Утверждение С.1

Пусть $K = \bigoplus_{i \in \omega} K_i$ — это группа, такая что каждое K_i либо является циклической группой порядка p^n для $n \in \omega$, либо $K_i \cong \mathcal{Z}$.

- Для $n \geq 1$ верно $\alpha_{p,n}(K) = |\{i \in \omega : K_i \cong \mathbb{Z}(p^n)\}|$.
- Если группа $T(K)$ ограничена, то $\gamma_p(K) = |\{i \in \omega : K_i \cong \mathcal{Z}\}|$.
- Если $T(K)$ неограничена, то $\gamma_p(K) = \omega$.

Из леммы 5.(а) вытекает:

- $T(A) \cong T(B)$;
- если группа $T(A)$ ограничена, то $A \cong B$ и $[\varphi : \psi, A] = [\varphi : \psi, B]$.

Теперь можно считать, что группа $T(A)$ неограничена, т.е. $T(A)$ содержит прямые слагаемые вида $\mathbb{Z}(p^n)$ для сколь угодно больших $n \in \omega$.

Утверждение C.2

Пусть K — абелева группа; $\theta(x) = \exists y(p^t x = p^s y)$, где $t \leq s$.

- $\theta(K) = (K[p^t] + p^{s-t}K)$.
- Если $K = \mathbb{Z}(p^n)$, где $n \geq s$, или $K = \mathcal{Z}$, то $\theta(K) = p^{s-t}K$.

Пусть r — максимальное число, такое что p^r является коэффициентом в формулах φ или ψ.

Пусть m_0 — максимальное число вида $(s-t)$ для подформул $\exists y(p^t x = p^s y)$, входящих в φ. Считаем, что $m_0 = 0$, если таких подформул нет.

Тогда из утверждения C.2 следует: $\varphi(\mathcal{Z}) = p^{m_0}\mathcal{Z}$ и $\psi(\mathcal{Z}) = p^{k-\ell}\mathcal{Z}$.

В силу того, что $\psi(\mathcal{Z}) \subseteq \varphi(\mathcal{Z})$, выполнено $k - \ell \geq m_0$.

(a) Если $k - \ell > m_0$, то для любого $n \geq r$ выполнено: $[\varphi : \psi, \mathbb{Z}(p^n)] > 1$.

Замечание. Если $\theta(x)$ — п.п.ф., то $\theta(K_1 \oplus K_2) = \theta(K_1) \oplus \theta(K_2)$.

Если $k - \ell > m_0$, то для любого $n \geq r$ выполнено: $[\varphi : \psi, \mathbb{Z}(p^n)] > 1$.

Из замечания и неограниченности периодической части $T(A)$ выводим, что $[\varphi : \psi, T(A)] = \omega$.

Так как $T(A)$ есть прямое слагаемое в A, получаем, что $[\varphi : \psi, A] = \omega = [\varphi : \psi, B]$.

(b) Если $k - \ell = m_0$, то для любого $n \geq r$ выполнено $[\varphi : \psi, \mathbb{Z}(p^n)] = 1$.

Тогда $T(A) = F \oplus \bigoplus_{i \in \omega} K_i$, где $p^{r-1}F = 0$ и каждая K_i изоморфна $\mathbb{Z}(p^{n_i})$ для $n_i \geq r$.

Можно проверить, что:

$$[\varphi : \psi, A] = [\varphi : \psi, T(A)] = [\varphi : \psi, F].$$

Из того, что $T(A) \cong T(B)$, заключаем, что $[\varphi : \psi, A] = [\varphi : \psi, B]$. $\square$

Разрешимость теории абелевых групп.

Напомним формулы из определения инвариантов Шмелевой:

(a) $A_{p,n,k}$: существует p-чистая подгруппа, изоморфная $\bigoplus_{1\leq i\leq k}\mathbb{Z}(p^n)$;

(b) $B_{p,n,k}$: существует подгруппа, изоморфная $\bigoplus_{1\leq i\leq k}\mathbb{Z}(p^n)$;

(c) $C_{p,n,k}$: существуют $x_1,\ldots,x_k$, такие что для их образов $x'_1,\ldots,x'_k$ в фактор-группе $\overline{G}=G/G[p^n]$ соответствующие смежные классы $p\overline{G}+x'_1,\ldots,p\overline{G}+x'_k$ линейно независимы (над простым полем характеристики p) в фактор-группе $\overline{G}/p\overline{G}$;

(d) E_n истинно в группе G том и только том случае, когда $nG=0$.

Пусть Γ_0 — множество всех булевых комбинаций предложений $A_{p,n,k}, B_{p,n,k}, C_{p,n,k}, E_n$.

Заметим, что множество Γ_0 разрешимо.

Сведение к предложениям из Γ_0

Напомним, что T_{AG} — это теория абелевых групп.

Множество Γ_0 замкнуто относительно взятия булевых комбинаций формул.

Предложение D

Любое предложение φ сигнатуры σ_{AG} эквивалентно в T_{AG} предложению φ^* из множества Γ_0. Более того, φ^* строится эффективно по φ.

Доказательство. Рассмотрим множество предложений

$$X = \{\neg\psi : \ \psi \in \Gamma_0, \ (T_{AG} \cup \{\psi\}) \rhd \varphi\}.$$

Допустим, что множество $Y = T_{AG} \cup X \cup \{\varphi\}$ совместно. Тогда существует полная непротиворечивая теория $T_0 \supseteq Y$.

В силу теоремы С множество $T_{AG} \cup (T_0 \cap \Gamma_0)$ является множеством аксиом для теории T_0. Значит, $T_{AG} \cup (T_0 \cap \Gamma_0) \rhd \varphi$. Следовательно, существует предложение $\psi_0 \in T_0 \cap \Gamma_0$, такое что $T_{AG} \cup \{\psi_0\} \rhd \varphi$, но тогда $\neg\psi_0 \in X \subseteq T_0$, — противоречие тому, что теория T_0 непротиворечива.

Итак, множество $Y = T_{AG} \cup X \cup \{\varphi\}$ несовместно, следовательно, $T_{AG} \cup X \rhd \neg\varphi$. Существует конечный набор формул $\neg\psi_0, \ldots, \neg\psi_n \in X$, такой что $T_{AG} \cup \{\neg\psi_0, \ldots, \neg\psi_n\} \rhd \neg\varphi$.

Отсюда следует, что

$$T_{AG} \rhd \left(\varphi \leftrightarrow \left(\bigvee_{1 \le i \le n} \psi_i\right)\right).$$

Из конечной аксиоматизируемости T_{AG} вытекает, что предложение $\varphi^* = \bigvee_i \psi_i$ можно найти эффективно по φ. □

Сведение к предложениям из Γ_0

В силу предложения D теперь достаточно рассматривать только предложения $\psi \in \Gamma_0$.

Ясно, что $\psi \notin T_{AG}$ в том и только том случае, когда существует абелева группа $G \models \neg\psi$.

Достаточно установить, что существует алгоритм для следующей проверки: по данному $\psi \in \Gamma_0$ проверить, выполнимо ли ψ в некоторой абелевой группе.

Базисные размерности

Пусть G — абелева группа. Тогда определим *базисные* (p,n)-*размерности* (первого, второго и третьего родов) для G:

- $D^{\alpha}_{p,n}(G) = \dim((p^{n-1}G)[p]/(p^nG)[p]) = \sup\{k : G \models A_{p,n,k}\}$ для $n \geq 1$;
- $D^{\beta}_{p,n}(G) = \dim((p^{n-1}G)[p]) = \sup\{k : G \models B_{p,n,k}\}$ для $n \geq 1$;
- $D^{\gamma}_{p,n}(G) = \dim((G/G[p^n])/p(G/G[p^n])) = \sup\{k : G \models C_{p,n,k}\}$.

Замечание. $D^{\kappa}_{p,n}(G \oplus H) = D^{\kappa}_{p,n}(G) + D^{\kappa}_{p,n}(H)$ при $\kappa \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Базисные размерности для базисных групп

Базисные группы:

- $\mathbb{Z}(p^n)$, $n \in \omega$;
- $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая p-группа;
- $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$;
- R_p — подгруппа $\mathcal{Q}$, состоящая из несократимых дробей $\frac{k}{m}$, где НОД$(m, p) = 1$.

Базисные размерности для базисных групп

Лемма 6

Пусть $\kappa \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$; A — базисная группа.

(a) $D^{\kappa}_{p,n}(A) \in \{0, 1\}$.

(b) $D^{\kappa}_{p,n}(\mathcal{Q}) = 0$.

(c) Пусть $q \neq p$. Если A — это q-группа или $A = R_q$, то $D^{\kappa}_{p,n}(A) = 0$.

(d) $D^{\alpha}_{p,n}(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = \mathbb{Z}(p^n)$.

(e) Для $A = \mathbb{Z}(p^m)$ выполнено:

- $D^{\beta}_{p,n}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $m < n$;
- $D^{\gamma}_{p,n}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $m \leq n$.

(f) $D^{\beta}_{p,n}(\mathbb{Z}(p^{\infty})) = 1$ и $D^{\beta}_{p,n}(R_p) = 0$.

(g) $D^{\gamma}_{p,n}(\mathbb{Z}(p^{\infty})) = 0$ и $D^{\gamma}_{p,n}(R_p) = 1$.

Разрешимость теории абелевых групп

Основная теорема (В. Шмелева, 1955)

Теория абелевых групп T_{AG} разрешима.

Доказательство. Пусть ψ — это предложение из Γ_0. Необходимо алгоритмически проверить, выполнимо ли ψ в некоторой абелевой группе G.

Можно считать, что ψ — это конъюнкция конечного числа предложений $A_{p,n,k}, B_{p,n,k}, C_{p,n,k}, E_n$ и их отрицаний.

Пусть n^*, k^* — это максимальные числа (среди n и k соответственно), для которых $S_{p,n,k}$ (где $S \in \{A, B, C\}$) является подформулой формулы ψ.

Случай 1. Пусть для некоторого $n \in \omega$ предложение ψ содержит конъюнкт $E_n = \forall x(nx = 0)$.

Если $n = 0$, то E_n тождественно истинно и его можно удалить из формулы ψ.

Если $n = 1$, то E_n истинно лишь на нулевой группе, поэтому проверка выполнимости ψ разрешима.

Пусть $n = p_0^{s_0} \cdot p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{s_r}$. Тогда достаточно проверить выполнимость ψ только в классе групп вида

$$G = \bigoplus_{i \leq r} G_i,$$

где G_i — это не более чем счётная прямая сумма групп, каждая из которых изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}(p_i^t)$ для некоторого $t \leq s_i$.

Более того, можно считать, что в каждой G_i для каждого $t \leq s_i$ существует не более чем k^* прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}(p_i^t)$.

Значит, достаточно проверить выполнимость ψ в конечном классе $\mathcal{K}_\psi$ конечных групп, и этот класс $\mathcal{K}_\psi$ находится эффективно по ψ.

Случай 2. Пусть предложение ψ не содержит конъюнктов вида $E_n = \forall x(nx = 0)$.

Напомним, что все базисные размерности для группы $\mathcal{Q}$ равны 0. Следовательно, для любого предложения $S_{p,n,k}$ (где $S \in \{A, B, C\}$) и любой группы G выполнено:

$$G \models S_{p,n,k} \;\Leftrightarrow\; (G \oplus \mathcal{Q}) \models S_{p,n,k}.$$

В группе $G \oplus \mathcal{Q}$ все предложения E_n, $n \geq 1$, ложны.

Поэтому можно считать, что ψ — это конъюнкция формул вида $S_{p,n,k}$ и их отрицаний.

Предположим, что ψ истинно в некоторой группе G. Тогда рассмотрим группу

$$G_1 = \bigoplus_p \left(\left(\bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{0 \leq i < \alpha_{p,n}(G)} \mathbb{Z}(p^n) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \beta_p(G)} \mathbb{Z}(p^\infty) \right) \oplus \right.$$
$$\left. \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \gamma_p(G)} R_p \right) \right).$$

Группы G и G_1 имеют одинаковые инварианты Шмелевой, поэтому по теореме C получаем, что $G_1 \models \psi$.

Пусть P^* — (конечное) множество всех простых чисел p, таких что подформулы $S_{p,n,k}$ входят в ψ. Можно показать, что предложение ψ будет истинно и в группе

$$G_2 = \bigoplus_{p \in P^*} \left(\left(\bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{0 \leq i < \alpha^*_{p,n}} \mathbb{Z}(p^n) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \beta^*_p} \mathbb{Z}(p^\infty) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \gamma^*_p} R_p \right) \right),$$

где $\alpha^*_{p,n} = \min(\alpha_{p,n}(G), k^*)$, $\beta^*_p = \min(\beta_p(G), k^*)$ и $\gamma^*_p = \min(\gamma_p(G), k^*)$.

Из леммы 6 вытекает, что ψ будет истинно в группе

$$G_3 = \bigoplus_{p \in P^*} \left(\left(\bigoplus_{1 \leq n \leq n^*} \bigoplus_{0 \leq i < \alpha^*_{p,n}} \mathbb{Z}(p^n) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \widehat{s}} \mathbb{Z}(p^{n^*+1}) \right) \oplus \right.$$
$$\left. \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \beta^*_p} \mathbb{Z}(p^\infty) \right) \oplus \left(\bigoplus_{0 \leq i < \gamma^*_p} R_p \right) \right),$$

где $\widehat{s} = \min\left(\sum_{n > n^*} \alpha^*_{p,n}, k^* \right)$.

$$G_3 = \bigoplus_{p\in P^*}\Bigg(\Bigg(\bigoplus_{1\le n\le n^*}\ \bigoplus_{0\le i<\alpha^*_{p,n}} \mathbb{Z}(p^n)\Bigg)\oplus\Bigg(\bigoplus_{0\le i<\widehat{s}}\mathbb{Z}(p^{n^*+1})\Bigg)\oplus$$
$$\oplus\Bigg(\bigoplus_{0\le i<\beta^*_p}\mathbb{Z}(p^\infty)\Bigg)\oplus\Bigg(\bigoplus_{0\le i<\gamma^*_p} R_p\Bigg)\Bigg).$$

Потенциальных «кандидатов» в группы G_3, в которых может быть истинно ψ, уже конечное число. В самом деле, имеет место:

- P^* — конечное множество, эффективно строящееся по ψ;
- параметры n^*, k^* находятся эффективно по ψ;
- числа $\alpha^*_{p,n}, \beta^*_p, \gamma^*_p, \widehat{s}$ не превосходят k^*.

Значит, по данному предложению ψ можно эффективно:

1. Найти параметры P^*, n^*, k^*.
2. Построить конечный список потенциальных «кандидатов» G_3.
3. Для каждого «кандидата» G_3 при помощи леммы 6 найти его базисные размерности $D^{\kappa}_{p,n}(G_3)$ для $p \in P^*$ и $n \leq n^*$. По этим размерностям уже можно проверить, верно ли $G_3 \models \psi$.

Предложение ψ выполнимо в некоторой абелевой группе G в том и только том случае, когда ψ истинно в одном из «кандидатов» G_3. □

Заключение

Итак, в курсе установлены следующие основные результаты:

Теорема C

Абелевы группы G и H элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда их инварианты Шмелевой совпадают.

Теорема (В. Шмелева, 1955)

Теория абелевых групп разрешима.

Спасибо за внимание!