Семантика с зависимыми типами и представление анафоры

Соколов Павел

МФТИ

5 апреля 2023

Где FOL не подходит — 1

Если использовать логику первого порядка, какие есть кандидаты для семантического представления (SR) высказывания:

$$\text{Every farmer who owns [a donkey]}_i \text{ beats it}_i$$

- Грамматически неверно:

$$\forall x(\mathrm{farmer}(x) \wedge \exists y(\mathrm{donkey}(y) \wedge \mathrm{own}(x, y)) \rightarrow \mathrm{beat}(x, y)) \quad (1)$$

- Не выводится синтаксически:

$$\forall x(\mathrm{farmer}(x) \rightarrow \forall y(\mathrm{donkey}(y) \wedge \mathrm{own}(x, y) \rightarrow \mathrm{beat}(x, y))) \quad (2)$$

Где FOL не подходит — 2

Разберём ещё один пример:

$$[\text{A man}]_j \text{ entered. He}_j \text{ whistled.}$$

- Грамматически неверно:

$$\exists x(\text{man}(x) \wedge \text{enter}(x)) \wedge \text{whistle}(x) \tag{3}$$

- Не выводится синтаксически:

$$\exists x(\text{man}(x) \wedge \text{enter}(x) \wedge \text{whistle}(x)) \tag{4}$$

Чтобы исправить SR №3, нужно как-то ссылаться на переменную x из предыдущего квантора. Да и в целом для формальной семантики предлагается использовать **системы типов**.

Основные сведения из теории типов

Лямбда-исчисление

Синтаксис:

$$\begin{aligned} x, y &::= a, b, c, \ldots \\ M, N &::= x \mid MN \mid \lambda x.M \end{aligned}$$

Дополнительные синтаксические формы:

$$\begin{aligned} LMN &\equiv (LM)N \\ \lambda x.MN &\equiv \lambda x.(MN) \\ \lambda xy.M &\equiv \lambda x.\lambda y.M \end{aligned}$$

Если к синтаксису добавить правила редукции, получится Тьюринг-полная система переписывания термов. Для того, чтобы совладать с этой силищей, вводят **системы типов**.

STLC

Пусть есть набор атомарных типов $X, Y ::= A, B, C, \ldots$. В STLC допускаются следующие типы:

$$\frac{}{X \ \text{type}} \qquad \frac{T \ \text{type} \qquad U \ \text{type}}{T \to U \ \text{type}} \ (\to F)$$

При этом $(\to)$ правоассоциативна:
$A \to B \to C \equiv A \to (B \to C)$.
Кроме этого, типы и термы связывают правила типизации:

$$\frac{(x : T) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \ (\textsc{Var}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : T \to U \qquad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash MN : U} \ (\to I)$$

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash M : U}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \to U} \ (\to E)$$

Семантика STLC

Пусть каждому атомарному типу X поставлено в соответствие множество $[X]$. Тогда каждому типу T можно поставить в соответствие множество $[\![T]\!]$:

$$
\begin{aligned}
&[\![X]\!] = [X];\\
&[\![T \to U]\!] = [\![T]\!] \to [\![U]\!].
\end{aligned}
$$

Далее, пусть каждой переменной $(x : T)$ в контексте Γ поставлен в соответствие элемент $f(x)$ множества $[\![T]\!]$. Тогда, если $\Gamma \vdash M : U$, то M можно поставить в соответствие элемент $f^\ddagger(M)$ множества $[\![U]\!]$:

$$
\begin{aligned}
&f^\ddagger(x) = f(x);\\
&f^\ddagger(MN) = f^\ddagger(M)(f^\ddagger(N));\\
&f^\ddagger(\lambda x.M) = \{(t, (f \cup \{(x, t)\})^\ddagger(M)) \mid t \in [\![T]\!]\}
\end{aligned}
$$

STLC + Pairs

Исчисление можно расширять, добавляя новые правила формирования типов (F), а также ввода (I) и элиминации (E) термов.

$$\frac{T\ \text{type} \qquad U\ \text{type}}{T \times U\ \text{type}}\ (\times F) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : T \qquad \Gamma \vdash N : U}{\Gamma \vdash (M, N) : T \times U}\ (\times I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T \times U}{\Gamma \vdash \pi_1 M : T}\ (\times E_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : T \times U}{\Gamma \vdash \pi_2 M : U}\ (\times E_2)$$

В нетипизированном исчислении соответствующие термы можно кодировать так: $(M, N) = \lambda f.fMN$, $\pi_1 M = M(\lambda xy.x)$, $\pi_2 M = M(\lambda xy.y)$, но как отдельный тип в STLC тип пар построить нельзя.

Термы как доказательства

Пусть $\Gamma = \{f : (A \to B \to C), p : A \times B\}$. Тогда

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash f : A \to B \to C}\,\text{Var} \quad \cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash p : A \times B}\,\text{Var}}{\Gamma \vdash \pi_1 p : A}\,\times E_1}{\Gamma \vdash f(\pi_1 p) : (B \to C)}\,\to E \quad \cfrac{\cfrac{}{\Gamma \vdash p : A \times B}\,\text{Var}}{\Gamma \vdash \pi_2 p : B}\,\times E_2}{\Gamma \vdash f(\pi_1 p)(\pi_2 p) : C}\,\to E}{f : (A \to B \to C) \vdash \lambda p.f(\pi_1 p)(\pi_2 p) : A \times B \to C}\,\to I}{\vdash \lambda fp.f(\pi_1 p)(\pi_2 p) : (A \to B \to C) \to A \times B \to C}\,\to I$$

Но заметим, что это подозрительно напоминает дерево вывода $(A \to B \to C) \to A \wedge B \to C$ в интуиционистской логике.

Соответствие Карри-Говарда

Логика	Типы
Утверждения	Типы
Доказательства	Термы
$A \rightarrow B$	$A \rightarrow B$
MP	$(\rightarrow_E)$
$A \land B$	$A \times B$
$\forall x.A$	???
$\exists x.A$	???

Теория зависимых типов (DTT)

Что такое зависимый тип?

В STLC (и STLC+Pairs), правила формирования типов не использовали контекст. А если теперь могут использовать? Например,

$$\frac{\Gamma \vdash m : \mathrm{man} \qquad \Gamma \vdash t : \mathrm{thing}}{\Gamma \vdash \mathrm{own}(m, t) \;\; \mathrm{type}} \; (\mathrm{own}\, F)$$

Продолжая соответствие Карри-Говарда, при правильном выборе правил ввода и элиминации термам типа $\mathrm{own}(f^\ddagger(m), f^\ddagger(t))$ будут соответствовать доказательства того, что человек m владеет вещью t.
Таким образом, зависимые типы соответствуют предикатам в многосортной логике первого порядка.

Зависимое произведение

$$\frac{\Gamma \vdash A \ \text{type} \qquad \Gamma, x : A \vdash B \ \text{type}}{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B \ \text{type}} \ (\Pi\mathsf{F}) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \prod_{x:A} B} \ (\Pi\mathsf{I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \prod_{x:A} B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B[N/x]} \ (\Pi\mathsf{E})$$

Тип зависимого произведения — тип функций, где область значений зависит от аргумента. При этом по соответствию Карри-Говарда зависимое произведение соответствует квантору всеобщности.
Также заметим, что теперь $A \to B$ можно выразить как $\prod_{x:A} B$.

Зависимая сумма

$$\frac{\Gamma \vdash A \ \text{type} \qquad \Gamma, x : A \vdash B \ \text{type}}{\Gamma \vdash \sum_{x:A} B \ \text{type}} \ (\Sigma\mathsf{F})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B[M/x]}{\Gamma \vdash (M, N) : \sum_{x:A} B} \ (\Sigma\mathsf{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sum_{x:A} B}{\Gamma \vdash \pi_1 M : A} \ (\Sigma\mathsf{E}_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sum_{x:A} B}{\Gamma \vdash \pi_2 M : B[\pi_1 M/x]} \ (\Sigma\mathsf{E}_2)$$

Альтернативная нотация

Также встречаются обозначения $(\Pi x : A)B$ и $(x : A) \to B$ для $\prod_{x:A} B$, а также $(\Sigma x : A)B$ и $(x : A) \times B$ для $\sum_{x:A} B$. Более того, ближе к концу презентации мы будем использовать следующую нотацию:

$$\begin{bmatrix} x : A \\ B \end{bmatrix} = \sum_{x:A} B$$

DTT для представления анафоры

Наивный подход: успех?

Первый пример:

Every farmer who owns [a donkey]$_i$ beats it$_i$.

$$\prod_{f\,:\,\mathrm{farmer}} \left(p : \sum_{d\,:\,\mathrm{donkey}} \mathrm{own}(f, d) \right) \to \mathrm{beat}(f, \pi_1 p)$$

Второй пример:

[A man]$_j$ entered. He$_j$ whistled.

$$\left(p : \sum_{m\,:\,\mathrm{man}} \mathrm{enter}(m) \right) \times \mathrm{whistle}(\pi_1 p)$$

Наивный подход: неудача

John is not a student.

$$\neg \begin{bmatrix} x : \text{student} \\ john =_{\text{student}} x \end{bmatrix}$$

If John is a student, ...

$$\begin{bmatrix} x : \text{student} \\ john =_{\text{student}} x \end{bmatrix} \to \ldots$$

NP как предикат

$[\text{A man}]_j$ entered. He_j whistled.

$$\left[\begin{array}{l} v : \left[\begin{array}{l} u : \left[\begin{array}{l} x : \text{entity} \\ \text{man}(x) \end{array}\right] \\ \text{enter}(\pi_1 u) \end{array}\right] \\ \text{whistle}(\pi_1 \pi_1 v) \end{array}\right]$$

На доске

На основе [BM17].

- Логические следствия и выводимость в DTT;
- Передача контекста;
- Частичная спецификация термов;
- Синтаксическое исчисление и семантическая композиция.

Список источников

Daisuke Bekki and Koji Mineshima, *Context-passing and underspecification in dependent type semantics*, 2017.