

Опр 1

Говорят, что

CFC обладает свойством

Феллеровости,

если

S_1^* — непрерывна в слабой топологии, то есть

если $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$, $d_n, d \in \mathcal{P}(B)$, то $S_1^* d_n \rightarrow S_1^* d$.

Напротив не верно мы доказали:

$\exists \mu \in \mathcal{P}(B)$, т.е.

Лемма 2

Если CFC — Феллерова и

$\forall \nu \in \mathcal{P}(B)$

$S_n^* \nu \rightarrow \mu$,

то μ — стационарная мер.

непр. оср. ф-ции

Как проверить Феллеровость?

Нужно проверить, что

$\forall f \in C_b(B)$

$$\langle S_1^* d_n, f \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle S_1^* d, f \rangle.$$

Используя этот абстрактное выражение.

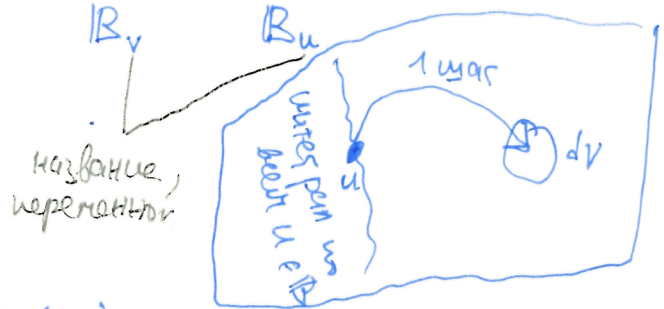
Пусть тогда $f \in L_\infty(B)$. Тогда

$$\langle S_1^* d, f \rangle = \int_B f(\nu) S_1^* d(d\nu) = \int f(\nu) \left(\int \Sigma_1(u)(d\nu) d(\mu) \right) =$$

(1)

т.е. формула

$$= \int_{B_u} \left(\int_{B_\nu} f(\nu) \Sigma_1(u) d\nu \right) d(\mu)$$



Рассмотрим марковский оператор

$$S_1: C_b(B) \rightarrow L_\infty(B),$$

$$(S_1 f)(u) = \int_B f(\nu) \Sigma_1(u)(d\nu) = \mathbb{E} f(x_1(u))$$

Этот оператор можно встретить в лекции 3

Согласно (1),

$$\langle S_1^* d, f \rangle = \langle d, S_1 f \rangle$$

$$\forall f \in L_\infty(B).$$



Аналогично, определяем $(S_n f)(u) = \mathbb{E} f(x_n(u)) = \int_B f(\nu) \Sigma_n(u)(d\nu)$,

и показывается, что S_n образует полугруппу операторов.

$$\text{Тогда } \langle S_n^* d, f \rangle = \langle d, S_n f \rangle \quad \forall f \in L_\infty(B).$$

Вернёмся к феллеровости.

7.2

Лемма 3 $C \subset \mathcal{F}$ феллеровы $\Leftrightarrow S_1: C_b(B) \rightarrow C_b(B)$, то есть

$\forall f \in C_b(B) \quad S_1 f$ — непрерывная ограничительная функция.

Доказ. $C \subset \mathcal{F}$ феллеровы $\Leftrightarrow \forall d_n, d \in \mathcal{D}(B)$, таким что

$d_n \rightarrow d$, имеем $S_1^* d_n \rightarrow S_1^* d$.

То есть, $\forall f \in C_b(B), \langle S_1^* d_n, f \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle S_1^* d, f \rangle$.

$$\langle S_1^* d_n, f \rangle = \langle d_n, S_1 f \rangle$$

$$\langle S_1^* d, f \rangle = \langle d, S_1 f \rangle.$$

Т.о., $C \subset \mathcal{F}$ феллеровы $\Leftrightarrow \langle d_n, S_1 f \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle d, S_1 f \rangle \quad \forall f \in C_b,$
 что верно $\Leftrightarrow S_1 f \in C_b$ (по определению слабой сходимости). $\forall (d_n \rightarrow d)$

Итого, феллеровость:

$$\begin{array}{c} S_1^*: \mathcal{D}(B) \rightarrow \text{— непрерывно} \\ \Downarrow \\ S_1: C_b(B) \rightarrow \end{array}$$

Предложение 4 $C \subset \mathcal{F}$ (5.1) — феллеровы.

Доказ. Проверим, что $S_1: C_b(B) \rightarrow$

Пусть $f \in C_b(B)$. Покажем, что $S_1 f$ тоже $\in C_b(B)$.

$(S_1 f)(u) = \mathbb{E} f(X_1(u)) \Rightarrow S_1 f$ — ограничена. Остается доказать непрерывность.

$S_1 f(u) = \mathbb{E} f(F(u) + \sum_{i=1}^n \epsilon_i)$. Если $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$ в B , то

$f(F(u_k) + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^w) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(F(u) + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^w) \quad \forall w$ в силу непрерывности f и F .

Так как f — ограниченная, по т. Лебега о мажоранрованной сходимости находим $(S_1 f)(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (S_1 f)(u)$

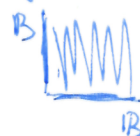
Опр. 5 Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(B)$. Пару случайных величин (η_1, η_2) , определённых на одном и том же вероятностном пространстве, называют комплексом $\mu \rightsquigarrow (\mu_1, \mu_2)$, если $\mathcal{D}(\eta_j) = \mu_j$, $j=1,2$.

Если $\mu = \mathcal{D}(\eta_1, \eta_2)$ — мерз на $B \times B$, то $\mu_j = \pi_j \circ \mu$, где π_j — проекция $B \times B$ на первое или второе B .

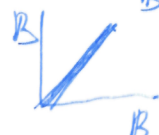
Для данных мер μ_1, μ_2 комплекс существует всегда. Можно найти совместное распределение μ , фиксируя его проекции.

Например, пусть $\mu_1 = \mu_2 = \hat{\mu}$. Рассмотрим два случая комплекса:

• η_1, η_2 — независимые с.в., $\mathcal{D}(\eta_j) = \hat{\mu}$.



• $\eta_1 = \eta_2 = \hat{\eta}$, $\mathcal{D}(\hat{\eta}) = \hat{\mu}$.



Альтернативное определение: комплекс $\mu \rightsquigarrow (\mu_1, \mu_2)$ — мерз μ , удовлетворяющий $\pi_j \circ \mu = \mu_j$.

Лемма 5 Пусть (η_1, η_2) — комплекс $\mu \rightsquigarrow (\mu_1, \mu_2)$. Тогда

$$P(\eta_1 \neq \eta_2) \geq \|\mu_1 - \mu_2\|_{var}.$$

$$-1 \leq 0 \leq 1$$

Доказ. $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(B)$,

$$\begin{aligned} \mu_1(\Gamma) - \mu_2(\Gamma) &= E(\mathbb{I}_\Gamma(\eta_1) - \mathbb{I}_\Gamma(\eta_2)) = E(\mathbb{I}_{\eta_1 \neq \eta_2} (\mathbb{I}_\Gamma(\eta_1) - \mathbb{I}_\Gamma(\eta_2))) \\ &\leq P(\eta_1 \neq \eta_2). \end{aligned}$$

Опр. 7 Комплекс (η_1, η_2) называется максимальным, если

$$P(\eta_1 \neq \eta_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|_{var}.$$

и η_1, η_2 независимы относительно условной вероятности при условии $\eta_1 \neq \eta_2$.

То есть! $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{B}(B)$ имеем

$$P(\eta_1 \in \Gamma_1, \eta_2 \in \Gamma_2 | \eta_1 \neq \eta_2) = P(\eta_1 \in \Gamma_1 | \eta_1 \neq \eta_2) P(\eta_2 \in \Gamma_2 | \eta_1 \neq \eta_2).$$

Задача 8 Пусть $\mu_1 \perp \mu_2$ ($\Leftrightarrow \|\mu_1 + \mu_2\|_{var} = 1$).

7.4

Докажите, что кантинг (γ_1, γ_2) для (μ_1, μ_2) — максимальный тогда и только тогда, когда γ_1 и γ_2 — независимы.

Лемма 9 (лемма Фабрициуса о кантинге) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(B)$ существует максимальный кантинг (γ_1, γ_2) .

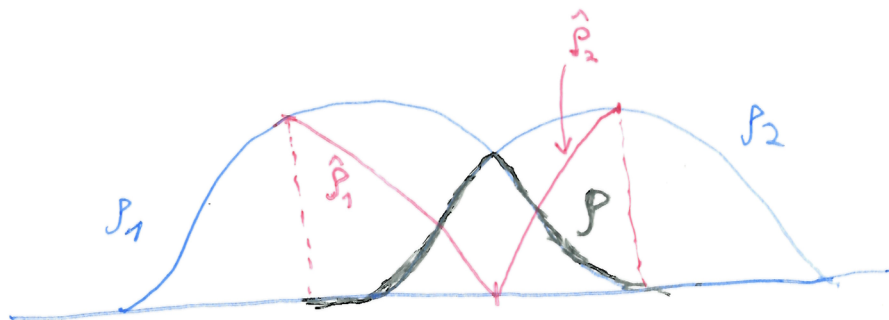
Доказ. Допустим лемму в предположении, что $B = \mathbb{R}^n$, а меры μ_i имеют плотность p_i , $\mu_i = p_i dx$.

- Если $\delta := \|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = 1$, то результат следует из задачи 8.
- Если $\delta = 0$, то выбираем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, где $\mathcal{Q}(\gamma) = \mu_1 = \mu_2$.
- Остается рассмотреть случай $0 < \delta < 1$.

Положим

$$p = \min(p_1, p_2), \quad \hat{p}_i = p_i - p \quad i=1,2$$

$$\boxed{\hat{p}_1 \perp \hat{p}_2}$$



Меры $\nu_i = \delta^{-1} \hat{p}_i dx$ и $\mu = (1 - \delta)^{-1} p$ — вероятностные. Действительно,

согласно теореме 4.4

$$\delta \nu_i(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{p}_i dx = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} \min(p_1, p_2)(x) dx = \delta \Rightarrow \nu_i(\mathbb{R}^n) = 1. \quad (2)$$

Аналогично,

$$(1 - \delta) \mu(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \min(p_1, p_2)(x) dx = 1 - \delta.$$

Рассмотрим с.в. Z_1, Z_2, Z и d — независимые и определенные
на одном и том же вероятностном пр-ве, и известные распределения

$$D(Z_i) = \nu_i, \quad D(Z) = \mu, \quad d \sim \text{Bernoulli}(1-\delta),$$

т.е. $P(d=0) = \delta, \quad P(d=1) = 1-\delta$.

Покажем, что с.в. $\eta_i = dZ + (1-d)Z_i, \quad i=1,2$ имеют

максимальный канонический гас (μ_1, μ_2) . Действительно,
проверим, что $D(\eta_i) = \mu_i$.

$$\forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

$$\begin{aligned} D(\eta_i)(\Gamma) &= P(\eta_i \in \Gamma) = P(\eta_i \in \Gamma, d=0) + P(\eta_i \in \Gamma, d=1) \\ &= P(d=0) P(Z_i \in \Gamma) + P(d=1) P(Z \in \Gamma) = \\ &= \delta \int_{\Gamma} \delta^{-1} \hat{P}_i(x) dx + (1-\delta) \int_{\Gamma} (1-\delta)^{-1} P(x) dx = \int_{\Gamma} P_0(x) dx = \mu_i(\Gamma). \end{aligned}$$

Далее,

$$P(\eta_1 \neq \eta_2) = P(d=0, Z_1 \neq Z_2) = P(d=0) P(Z_1 \neq Z_2) = P(d=0) = \delta.$$

Задача 10 Докажите, что Z_1 и Z_2 независимы относительно
условной вероятности при условии $dZ_1 \neq Z_2$.

Следствие 17 (Теорема 4.5 = "лемма Добружинского")

Любые две меры $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}(B)$ допускают представление

$$\mu_j = (1-\delta)\mu + \delta \nu_j \quad \text{где} \quad \delta = \|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{TV}}, \quad \mu, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(X) \quad \text{и} \quad \nu_1 \perp \nu_2.$$

Ф-ла (в случае $B = \mathbb{R}^n$) это в точности меры из (2).