Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 9. Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией. Немарковский резонансный распад

Теретёнков Александр Евгеньевич

4 апреля 2023 г.

Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией

Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией (Сачдев) при нулевой температуре определяется уравнением ГКСЛ

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\Omega\sigma^\dagger\sigma + \omega_1 b^\dagger b + g(\sigma^\dagger b + \sigma b^\dagger), \hat{\rho}(t)] + \\ + \gamma\left(b\hat{\rho}(t)b^\dagger - \frac{1}{2}b^\dagger b\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)b^\dagger b\right).$$

Оно сводится к одночастичному

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\Omega|1\rangle\langle 1| + \omega_1|2\rangle\langle 2| + g(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|), \rho(t)] + \\ + \gamma\left(|0\rangle\langle 2|\rho(t)|2\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)|2\rangle\langle 2|\right).$$

А оно к динамике с неэрмитовым гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = \Omega|1\rangle\langle 1| + \left(\omega_1 - i\frac{\gamma}{2}\right)|2\rangle\langle 2| + g(2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|).$$

Немарковский резонансный распад

Вернёмся к модели спин-бозона в приближении вращающейся волны:

$$G(t) = g^2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+i\omega_1\right)t}$$

$$H_{\text{eff}} = \Omega|\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| + \left(\omega_1 - i\frac{\gamma}{2}\right)|\tilde{1}\rangle\langle\tilde{1}| + g(|\tilde{1}\rangle\langle\hat{1}| + |\hat{1}\rangle\langle\tilde{1}|).$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_{\tilde{1}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\Omega & -ig\\ -ig & -i\omega_1 - \frac{\gamma}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_{\tilde{1}}(t)\end{pmatrix}.$$

Немарковский резонансный распад

Резонансный случай $\omega_1 = \Omega$.
Решение в случае начального условия $\psi_1(0) = 1, \psi_{\tilde{1}}(0) = 0$ имеет вид

$$\psi_1(t) = e^{-\left(\frac{\gamma}{4}+i\Omega\right)t}\left(\operatorname{ch}\Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta}\operatorname{sh}\Delta t\right),$$

$$\psi_{\tilde{1}}(t) = -\frac{ig}{\Delta}e^{-\left(\frac{\gamma}{4}+i\Omega\right)t}\operatorname{sh}\Delta t,$$

где $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$.

Частичный след и "одночастичное" вторичное квантование

Утверждение. Пусть $\hat{\rho} = \sum_{l,k=0}^{n} \rho_{lk} |\hat{l}\rangle\langle\hat{k}|$, тогда след по пространствам, пронумерованным индексами I, может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{X}_i, i\in I}\, \hat{\rho} = \hat{\rho}_{\overline{I}} + \sum_{l\in I} \rho_{ll} |\hat{0}\rangle\langle\hat{0}|, \quad \hat{\rho}_{\overline{I}} = \sum_{l,k\in\overline{I}} \rho_{lk} |\hat{l}\rangle\langle\hat{k}|,$$

где $\overline{I} = \{0, \ldots, n\} \setminus I$.

Немарковский резонансный распад

Резонансный случай $\omega_1 = \Omega$.
Решение в случае начального условия $\psi_1(0) = 1, \psi_{\tilde{1}}(0) = 0$ имеет вид

$$\psi_1(t) = e^{-\left(\frac{\gamma}{4}+i\Omega\right)t}\left(\operatorname{ch}\Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta}\operatorname{sh}\Delta t\right),$$
$$\psi_{\tilde{1}}(t) = -\frac{ig}{\Delta}e^{-\left(\frac{\gamma}{4}+i\Omega\right)t}\operatorname{sh}\Delta t,$$

где $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$. Решение после взятия следа (точное!):

$$\rho_S(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\operatorname{ch}\Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta}\operatorname{sh}\Delta t\right)^2 |1\rangle\langle 1| + \\ + \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\operatorname{ch}\Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta}\operatorname{sh}\Delta t\right)^2\right)|0\rangle\langle 0|.$$

Предел Боголюбова-ван Хова

Упражнение. Вычислить в пределе Боголюбова-ван Хова

$$\rho_M(t) \equiv \lim_{\lambda \to 0} \rho_S\left(\frac{1}{\lambda^2} t, \lambda g\right) =?$$

Проверить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_M(t) = \gamma_0 \left(|0\rangle\langle 1|\rho_M(t)|1\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|\rho(t) - \frac{1}{2}\rho_M(t)|1\rangle\langle 1| \right).$$

Явно вычислить γ_0.

Предел сильной связи

В режиме сильной связи получим осциллирующую динамику

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \rho_S \left(\frac{1}{\lambda} t, \lambda g \right) = \cos^2(gt)|1\rangle\langle 1| + \sin^2(gt)|0\rangle\langle 0|.$$

Таким образом, переход из марковского режима в сильно немарковский соответствует переходу из режима релаксации в режим осцилляций.

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

В случае произвольной матрицы плотности системы (в представлении взаимодействия)

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} |x(t)|^2\rho_{11}(0) & x(t)\rho_{10}(0) \\ x^*(t)\rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) + (1 - |x(t)|^2)\rho_{11}(0) \end{pmatrix},$$

где $x(t)$ — решение

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\int_0^t d\tau G(t-\tau)x(\tau), \qquad x(0) = 1$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

Упражнение. В случае $x(t) \neq 0$ редуцированная матрица плотности $\rho_S(t)$ удовлетворяет

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_t(\rho_S(t))$$

с зависящем от времени ГКСЛ-генератором

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\Delta\Omega(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right),$$

где

$$\Delta\Omega(t) = -\operatorname{Im}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \qquad \Gamma(t) = -2\operatorname{Re}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$\frac{d}{dt}x_\lambda(t) = -\lambda^2 \int_0^t d\tau G(t-\tau)x_\lambda(\tau).$$

После перерастяжки Боголюбова-ван Хова $x(t;\lambda) = x_\lambda(\lambda^{-2}t)$, имеем

$$\lambda^2 \frac{d}{dt}x(t;\lambda) = -\lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} G\left(\frac{t}{\lambda^2} - \tau\right) x(\lambda^2\tau;\lambda)d\tau.$$

После замены переменных $s = \lambda^2\tau$:

$$\frac{d}{dt}x(t;\lambda) = -\int_0^t \frac{1}{\lambda^2} G\left(\frac{t-s}{\lambda^2}\right) x(s;\lambda)ds,$$

где $x(0;\lambda) = 1$.

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

Сделаем преобразование Лапласа

$$p\tilde{x}(p;\lambda) - 1 = -\tilde{G}(\lambda^2 p)\tilde{x}(p;\lambda),$$

где $\tilde{G}(p) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-pt}G(t)dt$ и $\tilde{x}(p;\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-pt}x(t;\lambda)dt$. Тогда

$$\tilde{x}(p;\lambda) = \frac{1}{p + \tilde{G}(\lambda^2 p)}.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$\tilde{G}(\lambda^2 p) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k + O(\lambda^{2n+2}),$$

где

$$\tilde{G}_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty t^k G(t) dt.$$

$$\frac{1}{p + \tilde{G}(\lambda^2 p)} = \frac{1}{p + \sum_{k=0}^{n} \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k} + O(\lambda^{2n+2}),$$

В случае $\tilde{G}(p)$ общего положения будем считать $\tilde{G}_n \neq 0$, тогда

$$p + \sum_{k=0}^{n} \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k = (p - \tilde{p}) \lambda^{2n} \tilde{G}_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(p - \frac{p_k}{\lambda^2} \right),$$

где $\tilde{p} = O(1)$ для $\tilde{G}_0 \neq 0$ (для $\tilde{G}_0 = 0$ $\tilde{p} = o(1)$), $p_k = O(1)$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

В случае общего положения будем считать, что нет совпадающих $\tilde{p}_k$

$$\tilde{x}(p;\lambda) = \frac{r(\lambda)}{p - \tilde{p}(\lambda)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k(\lambda)}{p - \frac{p_k(\lambda)}{\lambda^2}} + O(\lambda^{2n+2}).$$

После обратного преобразования Лапласа:

$$x(t;\lambda) = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t} + \sum_{k=1}^{n-1} r_k(\lambda)e^{p_k(\lambda)\frac{t}{\lambda^2}} + O(\lambda^{2n+2}).$$

$$x(t;\lambda)|_{\mathrm{pert}} = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t}$$