Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки и таутохронная задача в фундаментальных исследованиях О.И. Сомова

The problem of rotation of a rigid body around a fixed point and the tautochronous problem in fundamental research O.I. Somov.

История аналитического решения задачи Эйлера о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки

1. Леонард Эйлер - 1758

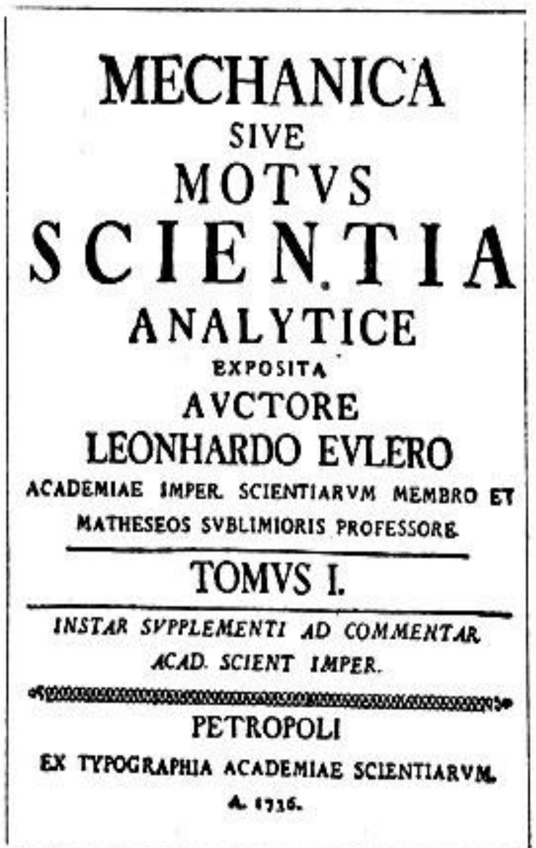
2. Жозеф Луи Лагранж - 1773

3. Осип Иванович Сомов - 1850

4. Софья Васильевна Ковалевская - 1887

Leonhard Euler (1707−1783)

1736, 1758

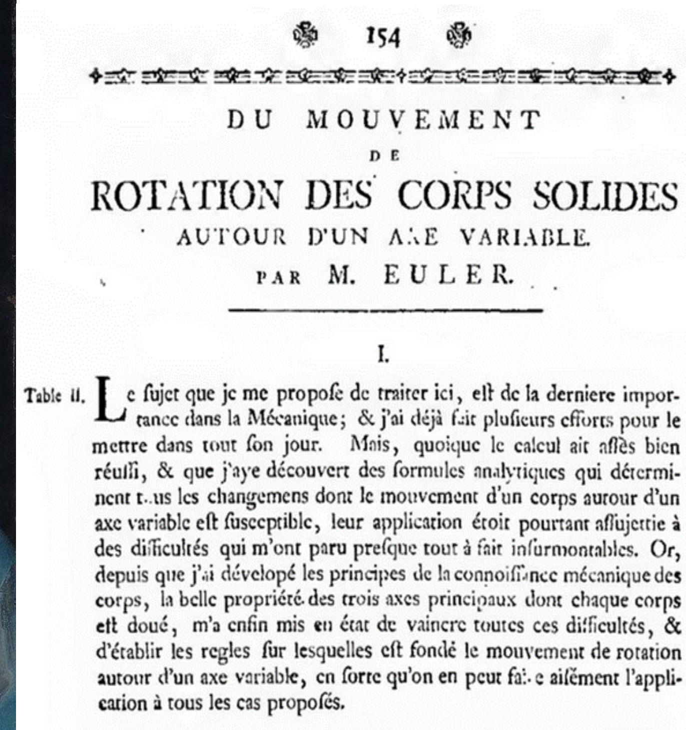


MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.



154

DU MOUVEMENT
DE
ROTATION DES CORPS SOLIDES
AUTOUR D'UN AXE VARIABLE.
PAR M. EULER.

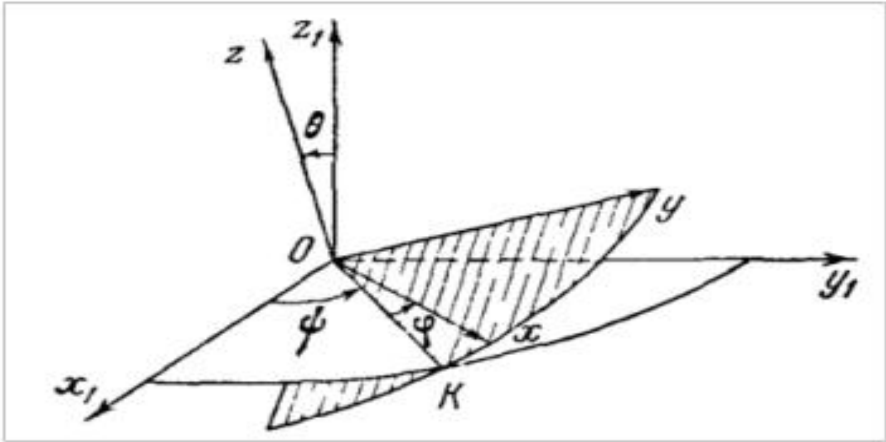
I.

Table II. Le ſujet que je me propoſe de traiter ici, eſt de la derniere importance dans la Mécanique; & j'ai déjà fait pluſieurs efforts pour le mettre dans tout ſon jour. Mais, quoique le calcul ait aſſés bien réuſſi, & que j'aye découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changemens dont le mouvement d'un corps autour d'un axe variable eſt ſusceptible, leur application étoit pourtant aſſujettie à des difficultés qui m'ont paru preſque tout à fait inſurmontables. Or, depuis que j'ai dévelopé les principes de la connoiſſance mécanique des corps, la belle propriété des trois axes principaux dont chaque corps eſt doué, m'a enfin mis en état de vaincre toutes ces difficultés, & d'établir les regles ſur lesquelles eſt fondé le mouvement de rotation autour d'un axe variable, en ſorte qu'on en peut faire aiſément l'application à tous les cas propoſés.

1758год. Леонард Эйлер. «Теория движения твердых тел» - задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

- Тело имеет три степени свободы (угол прецессии ψ , собственного вращения φ, нутации θ)

- Получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей и параметров движения)



$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta \ + \dot{\varphi}$$

Динамические уравнения

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x^e$$

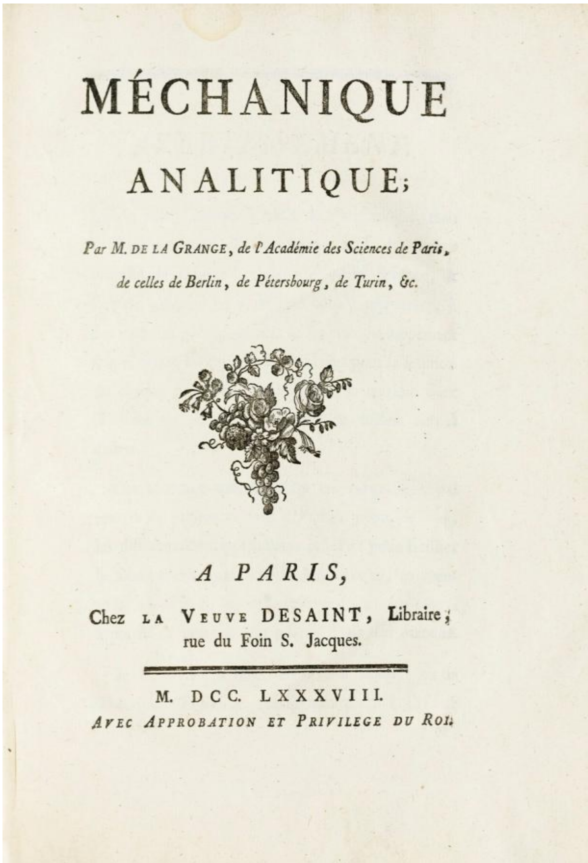
$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = M_y^e$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z^e$$

Координатные оси x, y, z – главные оси инерции, I_x, I_y, I_z– моменты инерции тела. M_x^e, M_y^e, M_z^e – моменты всех внешних сил относительно тех же осей. Полученную систему дифференциальных уравнений Л. Эйлер решает в предположении, что ось z является осью динамической симметрии и моменты всех внешних сил равны нулю, общее решение называет регулярной прецессией.

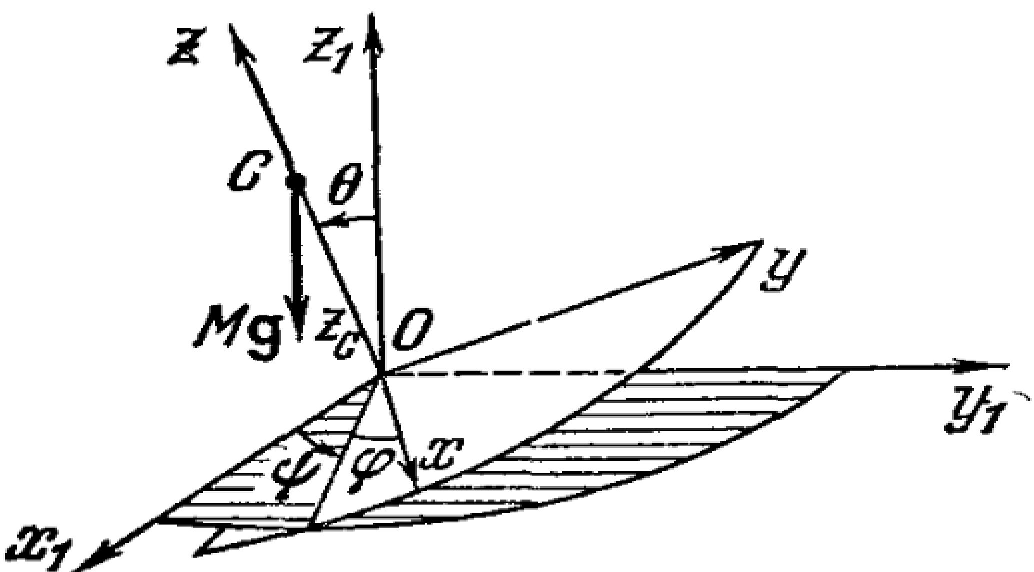
Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

1788



1773 г. Ж.Л. Лагранж.

Исследование вращения твердого тела некоторой формы около неподвижной точки.



«Случай Лагранжа»

1) эллипсоид инерции для неподвижной точки тела является эллипсоидом вращения ($I_x = I_y$);

2) центр тяжести тела лежит на оси z, которая является осью симметрии эллипсоида инерции и называется осью динамической симметрии тела.

Задачи Динамики (Леонард Эйлер)

Первая

Дано: кинематические параметры движения
Найти: силовые характеристики

Вторая

Дано: силовые характеристики
Найти: кинематика движения

Движение свободного твердого тела

- Свободные оси вращения, главные оси инерции
- Движение свободного твердого тела: поступательное движение с центром инерции+ вращение вокруг этого центра.
- Кинематическое описание такого движения
- Составление динамических уравнений

Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной токи Леонарда Эйлера

$$\begin{cases} P = A \cdot \dfrac{dP}{dt} + (C - B)qr, \\ Q = B \cdot \dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp, \\ R = C \cdot \dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq. \end{cases}$$

Л. Эйлер:

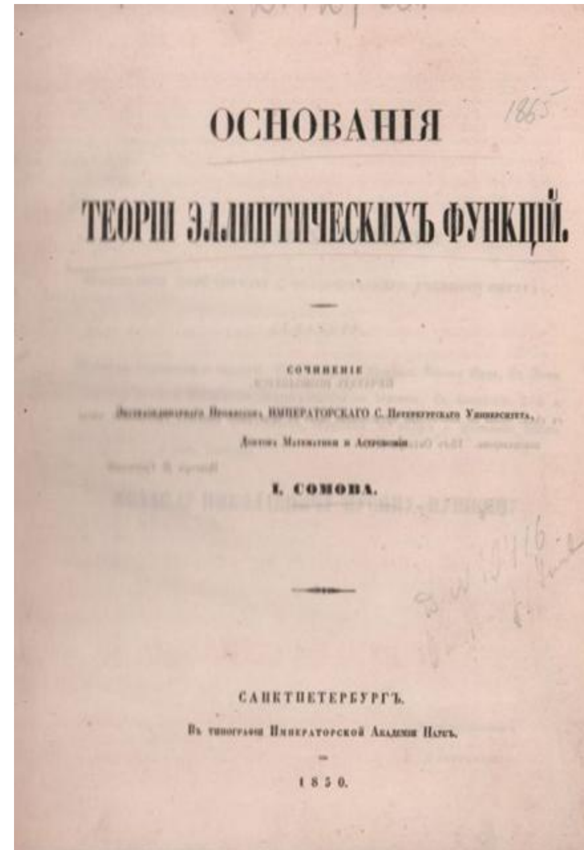
- «итог всей Теории Движения твердых тел содержится в этих трех достаточно простых формулах»
- Использование подвижной системы координат, неизменно связанной с телом – система главных осей инерции твердого тела
- Введение подвижного трехгранника, определение положения подвижной системы координат относительно неподвижной – углы Эйлера, 1748г.

Жозеф Луи Лагранж

- Понятие мгновенной оси вращения
- Новый вывод динамических уравнений Эйлера, на основе дифференциальных уравнений движений системы («Уравнения Лагранжа второго рода»)
- Постановка задачи о вращении твердого тела : точка опоры не совпадает с центром тяжести тела («работает» сила тяжести)
- Введение динамической симметрии в задачу о вращении

О.И. Сомов (1815-1876)

1850



ОСНОВАНІЯ

ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

СОЧИНЕНІЕ

Экстраординарнаго Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО С. Петербургскаго Университета,

Доктора Математики и Астрономіи

I. СОМОВА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1850.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. О.И. Сомов.

В этом случае тело имеет три степени свободы и начинает вращаться от первоначального удара. Далее ударные нагрузки отсутствуют, действует только сила тяжести.

Здесь A, B, C – моменты инерции относительно осей, параллельных главным осям вращающегося тела. При этом предполагается, что B-средняя между этими тремя величинами. Положение этих осей определяется углами Эйлера ψ, φ, θ.

Соответственно p, q, r – угловые скорости вращения относительно этих осей, составляющие мгновенную скорость вращения $\omega = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$

Дифференциальные уравнения движения (2-я часть Механики Пуассона)

$$\begin{cases} dt = \dfrac{A}{B-C} \cdot \dfrac{dp}{qr}, \\ dt = -\dfrac{B}{A-C} \cdot \dfrac{dq}{pr}, \\ dt = \dfrac{C}{A-B} \cdot \dfrac{dr}{pq}; \end{cases}$$

система фундаментальных интегралов:

$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2$ (l^2 - момент первоначального удара),

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$ (h - кинетическая энергия).

$$d\psi = -\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\cdot l\cdot dt.$$

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\cdot dt.$$

$$\psi = -\frac{l}{A}\int_{t_0}^{t} dt - \frac{l(A-B)}{A}\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt$$

$$\begin{cases} p = -\dfrac{l}{A}\sin\theta\sin\varphi = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\cos am(u)\,, \\ q = -\dfrac{l}{B}\sin\theta\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\sin am(u)\,, \\ r = \dfrac{l}{C}\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}}\Delta am(u). \end{cases}$$

Где $u = n(t - t_0), n = \sqrt{\dfrac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$.

$$\psi = -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n}\int_0^u \frac{sin^2 am(u)du}{1 + \dfrac{C(A-B)}{A(B-C)}sin^2 am(u)}.$$

О.И. Сомов. 1851.
Полное аналитическое решение.
Представление мнимого времени.

Par cette formule on trouve u, et par suite $t = \frac{u}{n}$, qui repondent au maximum de Ω.

A l'instant $t = \frac{K}{n}$ la valeur de Ω s'évanouit encore, parcequ'alors

$$\Omega = \tfrac{1}{2} i \log \frac{\Theta(K - ai)}{\Theta(K + ai)} = i\Pi(K, ai) - iKZ(ai) = iKZ(ai) - iKZ(ai) = 0;$$

après quoi elle réprend les mêmes valeurs dans le sens négatif; et ainsi de suite.

Il est facile de discuter aussi les autres circonstances du mouvement.

St. Petersbourg le 20 Mai 1850.

**О.И. Сомов. 1855.
Гироскопический эффект.
Аналитическое обоснование.**

«Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux et que le point fixe est situè sur lʾaxe, auquel repond le troisième moment; par J. Somoff. (Lu le 8 avril 1855.)»

№ 520. 521. **BULLETIN** Tome XIV. № 8. 9.

DE

LA CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE SAINT-PÉTERSBOURG.

Ce Recueil paraît *irrégulièrement*, par feuilles détachées dont *vingt-quatre* forment un volume. Les abonnés recevront avec le dernier numéro l'enveloppe, le frontispice, la table des matières et le registre alphabétique du volume. Les comptes rendus annuels de l'Académie entreront dans le corps même du Bulletin; les rapports sur les concours Démidoff seront annexés en guise de suppléments. Le prix de souscription, par volume, est de *trois roubles argent* tant pour la capitale que pour les gouvernements, et de *trois thalers de Prusse* pour l'étranger.

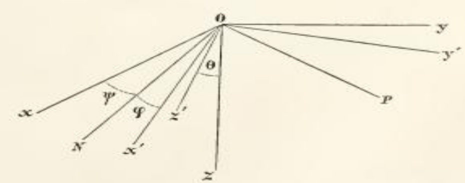
On s'abonne à St.-Pétersbourg chez MM. Eggers et Cie., libraires, commissionnaires de l'Académie, Nevsky-Prospect, No. 1 — 10. Les abonnés des gouvernements sont priés de s'adresser au Comité administratif (Комитетъ Правленія), Place de la Bourse, avec indication précise de leurs adresses. L'expédition des numéros se fera sans le moindre retard et sans frais de port. Les abonnés de l'étranger s'adresseront, comme par le passé, à M. Léopold Voss, libraire à Leipzig.

MÉMOIRES.

5. Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux et que le point fixe est situé sur l'axe, auquel repond le troisième moment; par J. SOMOFF. (Lu le 8 avril 1855.)

1) L'intégration des équations du mouvement d'un corps solide pesant, de figure quelconque, autour d'un point fixe qui ne se trouve pas au centre de gravité, présente jusqu'à présent des difficultés insurmontables. Dans le seul cas particulier d'un corps qui a deux moments principaux égaux, et dont le point fixe est sur l'axe, auquel repond le troisième moment, on est parvenu à exprimer les intégrales par des quadratures réductibles aux fonctions elliptiques; mais ces reductions sont restées inachevées, et on n'a pas profité des propriétés des fonctions elliptiques pour discuter rigoureusement les circonstances du mouvement. On s'est borné à remplacer les fonctions elliptiques par des formules approximatives, dans le cas où l'angle compris entre la verticale et l'axe de rotation reste très petit, et dans le cas d'une très grande vitesse de rotation. Le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie contient une solution complète et rigoureuse du problème enoncé, qui comprend, comme cas particulier, le problème du pendule conique, dont la solution complète a été déjà donnée par M. Tissot[1]. Les phénomènes curieux, observés sur le gyroscope ou la machine de Bonenberger, trouvent aussi leurs explications dans ce mémoire.

2) Les équations différentielles du mouvement que nous voulons considérer, ainsi que leurs premières intégrales, peuvent être tirées, ou de la Mécanique analytique de Lagrange, ou du Traité de Mécanique de Poisson. — Mais pour dispenser le lecteur de recourir à ces ouvrages, et pour présenter en même temps l'ensemble des données du problème, je deduirai immédiatement, les premières intégrales par un procédé géometrique.



1) Journal des Mathématiques pures et appliquées de M. Liouville. Tome XVII, *Thèse de Mécanique*.

Для гироскопического явления Сомов приводит подробные выводы относительно соотношения моментов инерции. Детально анализируя угловую скорость собственного вращения тела:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n[A\sin^2\theta + C\cos\theta(\cos\theta - \cos\alpha)]}{\sin^2\theta}$$

, Сомов доказывает, что подобное явление имеет место при следующих условиях:

$$A = \frac{C}{2}, \cos\alpha < 0, \cos^2\alpha > \frac{4A(C-A)}{C}$$

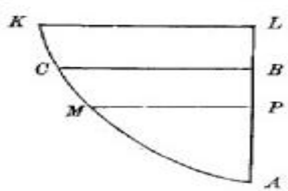
Н.Х. Абель. Таутохрона. 1823.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES À L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823

1.

C'est bien connu qu'on résout à l'aide d'intégrales définies, beaucoup de problèmes qui autrement ne peuvent point se résoudre, ou du moins sont très-difficiles à traiter. Elles ont surtout été appliquées avec avantage à la solution de plusieurs problèmes difficiles de la mécanique, par exemple, à celui du mouvement d'une surface élastique, des problèmes de la théorie des ondes etc. Je vais en montrer une nouvelle application en résolvant le problème suivant.



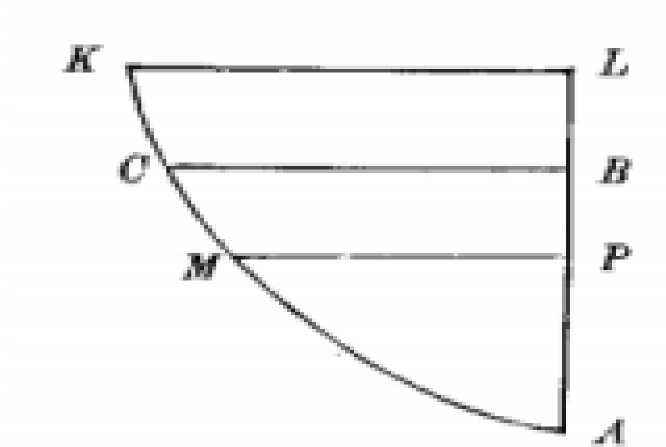
Soit CB une ligne horizontale, A un point donné, AB perpendiculaire à BC, AM une courbe dont les coordonnées rectangulaires sont $AP=x$, $PM=y$. Soit de plus $AB=a$, $AM=s$. Si l'on conçoit maintenant qu'un corps se meut sur l'arc CA, la vitesse initiale étant nulle, le temps T qu'il emploie pour le parcourir dépendra de la forme de la courbe, et de a. Il s'agit de déterminer la courbe KCA pour que le temps T soit égal à une fonction donnée de a, p. ex. ψa.

Si l'on désigne par h la vitesse du corps au point M, et par t le temps qu'il emploie pour parcourir l'arc CM, on a comme on sait

$$h=\sqrt{BP}=\sqrt{a-x},\quad dt=-\frac{ds}{h},$$

«Предположим, что CB — горизонтальная линия, A — заданное значение, AB перпендикулярно BC, AM кривая с прямоугольными координатами $AP = x, PM = y$. Более того $AB = x, AM = s$.

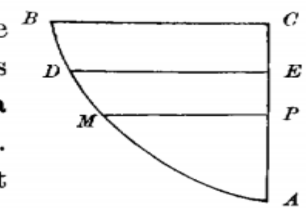
Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущенная без начальной скорости из любой точки кривой M на высоте a над самой низкой точкой кривой A, приходит в точку A в течении времени T, которое есть данная функция высоты ψa»



RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MECANIQUE.

Н.Х. Абель. Таутохрона. 1826

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.



Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A, et soit a la hauteur EA. La quantité τ sera une certaine fonction de a, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM. D'après les règles de la mécanique on a $\boxed{-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=0$,

$$\boxed{\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},}$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x=\alpha$ et $x=\beta$. Soit maintenant

$$\boxed{\tau = \varphi a}$$

Решение 1823

donc

$$\boxed{dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}},}$$

et en intégrant

$$\boxed{t = -\int \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.}$$

Pour avoir T on doit prendre l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$, on a donc

$$\boxed{T = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.}$$

Or comme T est égal à ψa, l'équation devient

$$\boxed{\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.}$$

Au lieu de résoudre cette équation, je vais montrer comment on peut tirer s de l'équation plus générale

$$\boxed{\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},}$$

2) Trouver l'équation de l'isochrone.

Puisque le temps doit être indépendant de l'espace parcouru, on a $\psi a = c$ et par conséquent

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi}\, c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

donc

$$s = k\sqrt{x},$$

où

$$k = \frac{c}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

ce qui est l'équation connue de la cycloide.

Решение 1826

la fonction donnée, on aura

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

équation de laquelle on doit tirer s en fonction de x. Au lieu de cette équation, nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons à déduire l'expression de s en x.

Désignons par $\Gamma\alpha$ la fonction

$$\Gamma\alpha = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma\alpha \,.\, \Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \alpha a^{\mu},$$

la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}}\,\Sigma \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi}\,\Sigma\left(\alpha\int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{x-a}}\right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{y^{\mu}dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})},$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi}\,\Sigma\,\frac{\alpha\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\,x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou, puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

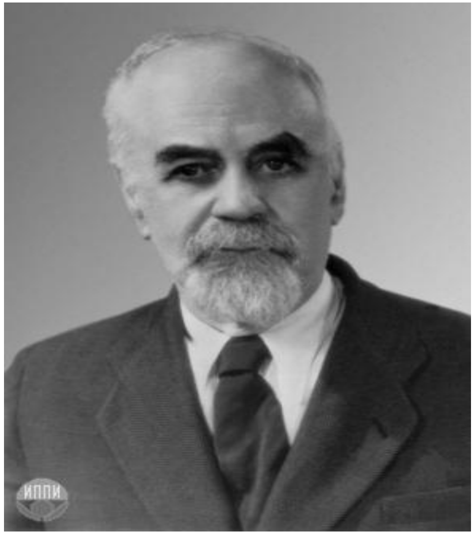
$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\left[\alpha_0\frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})}x^{\mu_0} + \alpha_1\frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})}x^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m\frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})}x^{\mu_m}\right].$$

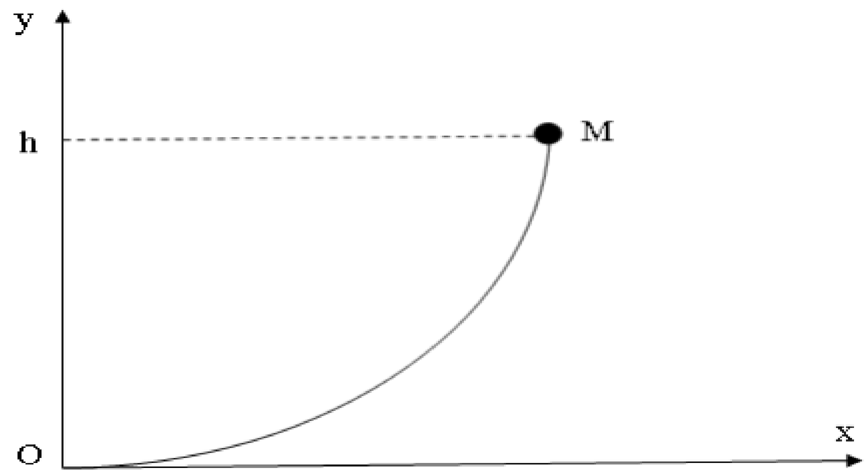
Si l'on suppose p. ex. que $m = 0$, $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,\alpha_0\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x},$$

or $s = \dfrac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

В.И. Смирнов. Курс высшей математики.
Т. II. Москва: Наука. 1967. – С. 249-252.





Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущенная без начальной скорости из любой точки кривой M на высоте h над самой низкой точкой кривой O, приходит в точку O в течении времени τ, которое есть данная функция высоты h:

$$\tau = \varphi(h).$$

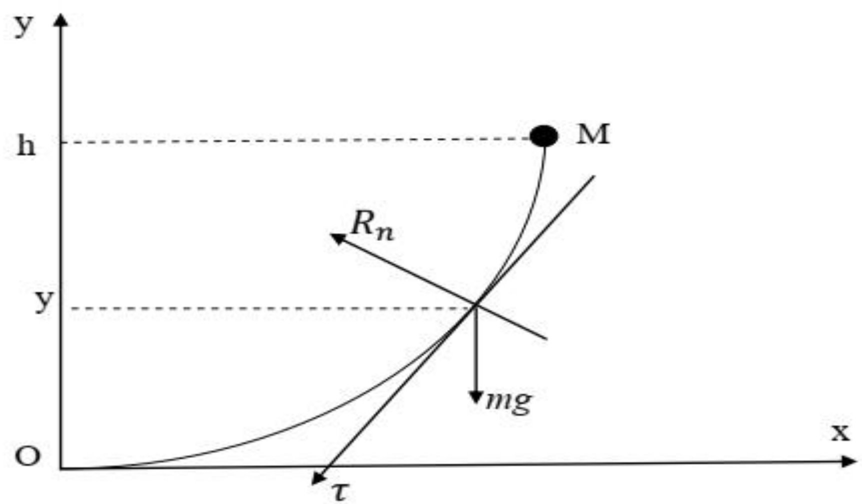
Кинематика задачи.

Точка движется по кривой, уравнение которой будем искать в виде: $x = f(y)$.

Скорость точки определим как изменение дуговой координаты s со временем t: $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Дифференциал дуги: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f'_y)^2}dy$

Обозначим $u(y) = \sqrt{1 + (f'_y)^2}$, получим $ds = u(y) \cdot dy$



Динамика задачи.

Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$\boxed{T - T_0 = \sum A.}$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} = mg(h-y), v = \sqrt{2g}\sqrt{h-y}, v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{h-y}}$$

Далее, получим время, за которое точка, опущенная с высоты h, приходит в точку O:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{h-y}} = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}}$$

Знак минус: при увеличении времени, координата y уменьшается; начальное положение точки соответствует $y = h$, конечное $y = 0$. Меняя пределы интегрирования избавляемся от минуса.

Но $u(y)$ неизвестная функция, которая находится в подынтегральном выражении.

$$\boxed{\tau = \varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}}}$$

Приведем основные этапы этого решения.

1. Домножим слева и справа (1) на $\dfrac{1}{\sqrt{z-h}}$, проинтегрируем по переменной h, которая меняется в пределах от 0 до z:

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}} \int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}}.$$

2. Полученный двойной интеграл преобразуем по формуле Дирихле:

$$\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}} \int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{h-y}} = \int_0^z dy \int_y^z \frac{u(y)dh}{\sqrt{z-h}\sqrt{h-y}}.$$

3. Последний интеграл $\int_y^z \frac{u(y)dh}{\sqrt{z-h}\sqrt{h-y}}$ возьмем с помощью замены $h = y + t(z-y)$.

$$\int_y^z \frac{u(y)dh}{\sqrt{z-h}\sqrt{h-y}} = \int_0^1 \frac{u(y)(z-y)dt}{\sqrt{(z-y)^2(1-t)t}} = u(y) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)t}}.$$

4. Далее, выделяя полный квадрат и, заменяя $2t-1=c$, получим:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)t}} = \int_0^1 \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}} = \arcsin(2t-1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

5. Возвращаясь к исходному интегралу (пункт 1):

$$\boxed{\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \int_0^z u(y)dy.}$$

6. Дифференцируя полученное уравнение, находим функцию $u(z)$:

$$\boxed{u(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}}.}$$

7. Возвращаясь на кинематику:

$$\boxed{u(y) = \sqrt{1 + (f'_y)^2},\ ds = u(y) \cdot dy.}$$

Таким образом, задача решена : найдена зависимость $s = f(y)$

8. Если время падения точки не зависит от высоты $\varphi(h) = const = C$, получаем *таутохронную кривую.*

$$u(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\sqrt{2g}\cdot C}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dz}(2\sqrt{z}) = \frac{\sqrt{2g}\cdot C}{\pi\sqrt{z}}.$$

Используя исходные кинематические соотношения:

уравнение кривой $x = f(y)$, дифференциал дуги $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f_y')^2}dy$, $u(y) = \sqrt{1 + (f_y')^2}$, $ds = u(y)\cdot dy$.

Переходя на полярные координаты: $(a, t), a = \dfrac{2gC^2}{2\pi^2}$, получим уравнение кривой:

$$y = a(1 + \cos t), x = x_0 - a(t - \sin t).$$

Кривая - перевернутая циклоида.

О.И. Сомов. 1869.

О РѢШЕНІИ ОДНОГО ВОПРОСА ИЗЪ МЕХАНИКИ, ПРЕДЛОЖЕННОМЪ АБЕЛЕМЪ.

Записка Акад. О. И. Сомова.

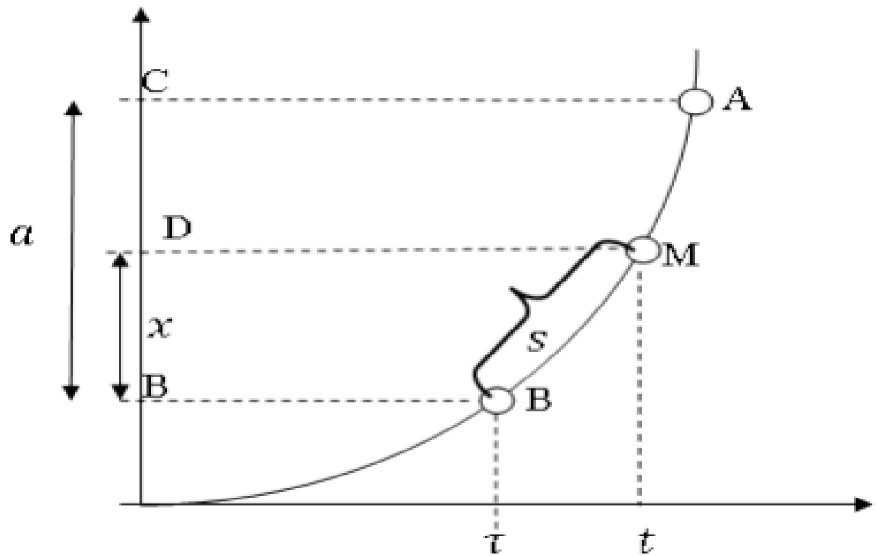
(Читана 26 ноября 1868 г.)

Въ одномъ изъ мемуаровъ Абеля, напечатанномъ въ первомъ томѣ математическаго журнала Крелле *), предложено рѣшеніе слѣдующаго вопроса изъ механики: «найдти кривую, описываемую тяжелымъ тѣломъ, зная время, въ которое тѣло спускается съ нѣкоторой высоты, въ функціи этой высоты». Задача таутохроны въ безвоздушномъ пространствѣ есть частный случай этого вопроса. Абель, основываясь на свойствахъ Эйлеровыхъ интеграловъ, находитъ общую формулу, изъ которой выводитъ какъ частный случай, выраженіе для дуги, пройденной тѣломъ, въ функціи высоты. Но если ограничиться только этимъ случаемъ, т. е. только рѣшеніемъ вышеозначеннаго вопроса, можно, не прибѣгая къ Эйлеровымъ интеграламъ, получить выраженіе дуги посредствомъ весьма простаго преобразованія перемѣнныхъ въ двойномъ интегралѣ. Этотъ пріемъ составляетъ предметъ записки, которую имѣю честь представить Академіи. Вмѣстѣ съ тѣмъ я показываю, что результатъ, найденный Абелемъ примѣняется также къ рѣшенію болѣе общей задачи: «найдти кривую, описываемую точкою на поверхности какого ни есть вида,

*) См. также полное собраніе сочиненій Абеля, т. I.

« Пусть A означает начальное положение тела, AB его траекторию, M его положение в момент t, B положение в момент τ, $BD = x$ разность высот точек M и B, $BC = a$ разность высот точек A и B, g тяжесть, и s дугу BM.»

I. Определение дуги, пройденной телом, в функции высоты.



На основании теоремы об изменении кинетической энергии («по началу живых сил») Сомов О.И. записывает:

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-x)}.}$$

Откуда получает:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.}$$

Далее записывает дугу s с помощью уравнения траектории, как некоторую неизвестную функцию $f(x)$: $s = f(x)$ и получает дифференциал дуги $ds = f'(x)dx$. После интегрирования $\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$ предполагает получить функцию a. Обозначает эту функцию через $\varphi(a)$ и получает уравнение:

$$\boxed{\int_0^a \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a), \qquad (1)}$$

1. « Положим, что $\boxed{x = a\sin^2\theta,}$ дабы освободить формулу которую следует интегрировать от радикала $\sqrt{a-x}$, и чтобы дать интегралу пределы, независимые от a.» После этой подстановки, уравнение (1) принимает вид:

$$\boxed{2\int\limits_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \varphi(a).} \tag{2}$$

2. Умножает обе части (2) на $\dfrac{da}{\sqrt{x-a}}$ и интегрируя от 0 до x находит:

$$\boxed{2\int\limits_0^{x} \frac{da}{\sqrt{x-a}} \int\limits_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \int\limits_0^{x} \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}} \tag{3}$$

3. Вводит полярные координаты точки $\boxed{(r = \sqrt{a}, \theta).}$ Тогда левая часть уравнения (3) представляет собой двойной интеграл, определяющий площадь круга, описанного радиусом $\sqrt{x}$. Учитывая это, уравнение (3) запишется следующим образом:

$$\boxed{4\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\pi/2}\frac{f'(r^2\sin^2\theta) r\sin\theta r dr d\theta}{\sqrt{x-r^2}} = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}} \qquad (4)$$

4. Переходит от полярных координат к прямоугольным:

$$\boxed{\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta.}$$

Тогда левая часть уравнения (4) преобразуется в:

$$\boxed{4\int\int\frac{f'(\eta)^2\eta d\eta d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}},}$$

где интеграл относительно x Сомов О.И. берет в пределах от 0 до $\sqrt{x-\eta^2}$, а интеграл относительно η от 0 до $\sqrt{x}$.

Первое интегрирование:

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{x-\eta^2}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi}{\sqrt{x-\eta^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}.}$$

Второе интегрирование:

$$\boxed{\pi\int_0^{\sqrt{x}} f'(\eta^2)2\eta d\eta = \pi f(x).}$$

$$\pi f(x)=\int\limits_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}, \Rightarrow S=f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}.$$

II. После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи:

«Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала»

Представим себе точку, на которую действует сила, имеющая потенциал u, под действием которой, точка движется по данной поверхности. Уравнение поверхности в обобщенных координатах $\boxed{q_1, q_2, q_3}$ имеет вид:

$$\boxed{F(q_1, q_2, q_3) = 0.}$$

Это уравнение и другое неизвестное определяют траекторию точки. Если к этому уравнению добавить выражение потенциала как функции координат q_1, q_2, q_3, то получим зависимость дуги s траектории от потенциала.

Сомов берет начало дуги s таким образом, чтобы при увеличении времени значение дуги уменьшалось. Тогда, по началу живых сил (теорема об изменении кинетической энергии), он получает:

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2u - 2u_0},}$$

Начальная скорость точки равна нулю, а u_0 - начальная скорость потенциала. Из этого уравнения Сомов получает:

$$\boxed{\tau = -\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\frac{ds}{du} \cdot du}{\sqrt{2u - 2u_0}}.}$$

Здесь τ это время движения по дуге s, ограниченной поверхностями уровня $u_0 u_1$. Далее автор выполняет замены разности потенциалов $u_1 - u_0 = a, u - u_0 = a - x$, и тогда если значение времени τ:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{\frac{ds}{dx} \cdot dx}{\sqrt{a - x}}}$$

должно приводится к данной функции $\Phi(u_1)$ текущего потенциала u_1, то вследствие формулы

$$\boxed{s = \int_0^x \frac{\varphi(a) da}{\sqrt{x - a}}}$$

где $\boxed{\varphi(a) = \sqrt{2}\Phi(u_1) = \sqrt{2}\Phi(u_0 + a).}$

Последнюю формулу Сомов О.И. представляет в следующем виде:

$$\boxed{S = \sqrt{2} \int_0^a \frac{\Phi(u_1) du_1}{\sqrt{u - u_1}}.}$$

Если траекторией движения является таутохрона , то для $\sqrt{2}\Phi(u_1)$ Сомов получает постоянную величину, которую обозначает через A.

Окончательно, пройденная дуга в таутохронной задаче может быть выражена через разность потенциалов следующим образом:

$$\boxed{S = A\int\limits_0^u \frac{du_1}{\sqrt{u-u_1}} = 2A\sqrt{u-u_0}.}$$