Отрицание в релевантной логике

Елизавета Бахтина

МГУ имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Релевантная логика

- **Релевантная логика** - это разновидность логики, в которой для того, чтобы формула $A \to B$ была истинной, необходимо, чтобы A и B были связаны между собой.

Релевантная логика

- **Релевантная логика** - это разновидность логики, в которой для того, чтобы формула $A \to B$ была истинной, необходимо, чтобы A и B были связаны между собой.
- При использовании классической логики возникают две основные проблемы:

Релевантная логика

- **Релевантная логика** - это разновидность логики, в которой для того, чтобы формула $A \to B$ была истинной, необходимо, чтобы A и B были связаны между собой.
- При использовании классической логики возникают две основные проблемы:
  1. **Парадоксы материальной импликации**
     Рассмотрим известное утверждение: "Если Джон в Париже, то он во Франции, и если Джон в Лондоне, то он в Англии, следовательно если он в Лондоне, то он во Франции, или если он в Париже, то он в Англии", формализуемое следующим образом:

     $$((P \to F) \wedge (L \to E)) \to ((L \to F) \vee (P \to E))$$

     Данное утверждение истинно в классической логике, однако с интуитивной точки зрения оно неверно.

Релевантная логика

- **Релевантная логика** - это разновидность логики, в которой для того, чтобы формула $A \to B$ была истинной, необходимо, чтобы A и B были связаны между собой.
- При использовании классической логики возникают две основные проблемы:
  1. **Парадоксы материальной импликации**
     Рассмотрим известное утверждение: "Если Джон в Париже, то он во Франции, и если Джон в Лондоне, то он в Англии, следовательно если он в Лондоне, то он во Франции, или если он в Париже, то он в Англии", формализуемое следующим образом:
     $$((P \to F) \land (L \to E)) \to ((L \to F) \lor (P \to E))$$
     Данное утверждение истинно в классической логике, однако с интуитивной точки зрения оно неверно.
  2. В классической логике выводима тавтология $A \land \neg A \to B$. Но если A и B никак не связаны друг с другом, то (с точки зрения релевантной логики) это утверждение ложно.

Язык релевантной логики

Мы рассматриваем язык с

- Пропрозициональными переменными $p_1, p_2 \dots$

Язык релевантной логики

Мы рассматриваем язык с

- Пропрозициональными переменными $p_1, p_2 \dots$
- Бинарными связками $\wedge, \vee, \to$ (релевантная импликация).

Язык релевантной логики

Мы рассматриваем язык с

- Пропрозициональными переменными $p_1, p_2 \ldots$
- Бинарными связками $\wedge, \vee, \to$ (релевантная импликация).
- Унарной связкой $\sim$ (релевантое отрицание)

Язык релевантной логики

Мы рассматриваем язык с

- Пропрозициональными переменными $p_1, p_2 \ldots$
- Бинарными связками $\wedge$, $\vee$, $\to$ (релевантная импликация).
- Унарной связкой $\sim$ (релевантое отрицание)
- Константами $\top, \bot$

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, {}^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:
  1. $s^{**} = s$ (инвалютивность)

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:
  1. $s^{**} = s$ (инвалютивность)
  2. Если $s_1 \leq s_2$, то $s_2^* \leq s_1^*$ (антимонотонность)

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:
  1. $s^{**} = s$ (инвалютивность)
  2. Если $s_1 \leq s_2$, то $s_2^* \leq s_1^*$ (антимонотонность)
- Истинность $\sim A$ в семантике Раутли определяется следующим образом:

$$x \models \sim A \iff x^* \not\models A$$

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:
  1. $s^{**} = s$ (инвалютивность)
  2. Если $s_1 \leq s_2$, то $s_2^* \leq s_1^*$ (антимонотонность)
- Истинность $\sim A$ в семантике Раутли определяется следующим образом:

$$x \vDash \sim A \iff x^* \nvDash A$$

- В случае, когда $x \neq x^*$, мы можем опровергнуть $A \wedge \sim A \to B$ или $A \to B \vee \sim B$.

Семантика Раутли для релевантной логики

В 70-х годах прошлого века Р. Раутли предложил следующую семантику для релевантных логик:

- Шкала Раутли: $(S, \leq, ^*)$, где $\leq$ — рефлексивное и транзитивное отношение;
- Оператор **Звездочка Раутли** $^* : S \to S$, обладающий следующими свойствами:
  1. $s^{**} = s$ (инвалютивность)
  2. Если $s_1 \leq s_2$, то $s_2^* \leq s_1^*$ (антимонотонность)
- Истинность $\sim A$ в семантике Раутли определяется следующим образом:

$$x \models \sim A \iff x^* \not\models A$$

- В случае, когда $x \neq x^*$, мы можем опровергнуть $A \wedge \sim A \to B$ или $A \to B \vee \sim B$.
- Далее мы покажем, что звездочку Раутли можно интерпретировать с помощью бинарного отношения совместимости.

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \vDash A$ или $x \vDash {\sim}A$) и непротиворечивы ($x \nvDash A \wedge {\sim}A$). На практике всё гораздо сложнее.

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \models A$ или $x \models \sim A$) и непротиворечивы ($x \not\models A \wedge \sim A$). На практике всё гораздо сложнее.
- Пусть имеется два эксперта А и В, каждый из которых высказывает какие-либо утверждения. Например:

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \models A$ или $x \models {\sim}A$) и непротиворечивы ($x \not\models A \wedge {\sim}A$). На практике всё гораздо сложнее.
- Пусть имеется два эксперта A и B, каждый из которых высказывает какие-либо утверждения. Например:
  - **Эксперт A**: Тихий океан - самый маленький в мире. Гипотеза Римана верна.

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \models A$ или $x \models \sim A$) и непротиворечивы ($x \not\models A \wedge \sim A$). На практике всё гораздо сложнее.
- Пусть имеется два эксперта А и В, каждый из которых высказывает какие-либо утверждения. Например:
  - **Эксперт А**: Тихий океан - самый маленький в мире. Гипотеза Римана верна.
  - **Эксперт В**: Земля вращается вокруг Солнца. Сумма углов в треугольнике равна 180 градусам.

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \vDash A$ или $x \vDash \sim A$) и непротиворечивы ($x \nvDash A \wedge \sim A$). На практике всё гораздо сложнее.
- Пусть имеется два эксперта A и B, каждый из которых высказывает какие-либо утверждения. Например:
  - **Эксперт A**: Тихий океан - самый маленький в мире. Гипотеза Римана верна.
  - **Эксперт B**: Земля вращается вокруг Солнца. Сумма углов в треугольнике равна 180 градусам.
- Мы видим, что если рассматривать наших экспертов в качестве “возможных миров”, то полученные миры *будут содержать утверждения, не являющиеся ни истинными, ни ложными*.

Миры и состояния

- Традиционная семантика возможных миров предполагает, что все миры в модели полны ($x \vDash A$ или $x \vDash \sim A$) и непротиворечивы ($x \nvDash A \wedge \sim A$). На практике всё гораздо сложнее.
- Пусть имеется два эксперта А и В, каждый из которых высказывает какие-либо утверждения. Например:
  - **Эксперт А**: Тихий океан - самый маленький в мире. Гипотеза Римана верна.
  - **Эксперт В**: Земля вращается вокруг Солнца. Сумма углов в треугольнике равна 180 градусам.
- Мы видим, что если рассматривать наших экспертов в качестве "возможных миров", то полученные миры *будут содержать утверждения, не являющиеся ни истинными, ни ложными*.
- В работе Г.Ресталла вместо множества возможных миров W будем рассматривать **множество состояний S**.

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
    1. $x \vDash A$ и $x \nvDash \sim A$

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \vDash A$ и $x \nvDash {\sim}A$
  2. $x \nvDash A$ и $x \vDash {\sim}A$

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \models A$ и $x \not\models \sim A$
  2. $x \not\models A$ и $x \models \sim A$
  3. $x \not\models A$ и $x \not\models \sim A$

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \models A$ и $x \not\models \sim A$
  2. $x \not\models A$ и $x \models \sim A$
  3. $x \not\models A$ и $x \not\models \sim A$
  4. $x \models A$ и $x \models \sim A$

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \vDash A$ и $x \nvDash \sim A$
  2. $x \nvDash A$ и $x \vDash \sim A$
  3. $x \nvDash A$ и $x \nvDash \sim A$
  4. $x \vDash A$ и $x \vDash \sim A$
- $x \vDash A$ читается так: “Согласно x, A верно” или “x содержит информацию A”, а $x \nvDash A$ означает “x не знает истинности A”. $x \vDash \sim A$ читаем как “В состоянии x A ложно”.

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \models A$ и $x \not\models \sim A$
  2. $x \not\models A$ и $x \models \sim A$
  3. $x \not\models A$ и $x \not\models \sim A$
  4. $x \models A$ и $x \models \sim A$
- $x \models A$ читается так: "Согласно x, A верно" или "x содержит информацию A", а $x \not\models A$ означает "x не знает истинности A". $x \models \sim A$ читаем как "В состоянии x A ложно".
- Введем на множестве состояний **отношение включения**: $x \leq y$ означает, что *всё, что верно в x, верно в y*.

Состояния

- Состояния могут быть неполными, то есть не отвечать абсолютно на все вопросы, и противоречивыми, то есть могут давать и утвердительный, и отрицательный ответ на один и тот же вопрос.
- Таким образом, для формулы A в состоянии x возможны четыре варианта:
  1. $x \models A$ и $x \not\models \sim A$
  2. $x \not\models A$ и $x \models \sim A$
  3. $x \not\models A$ и $x \not\models \sim A$
  4. $x \models A$ и $x \models \sim A$
- $x \models A$ читается так: "Согласно x, A верно" или "x содержит информацию A", а $x \not\models A$ означает "x не знает истинности A". $x \models \sim A$ читаем как "В состоянии x A ложно".
- Введем на множестве состояний **отношение включения**: $x \leq y$ означает, что *всё, что верно в x, верно в y*.
- Будем предполагать, что отношение $\leq$ рефлексивно и транзитивно.

Истинность логических связок

- Истинность конъюнкции и дизъюнкции определяется обычным образом:

$$x \vDash A \wedge B \iff x \vDash A \text{ и } x \vDash B$$

$$x \vDash A \vee B \iff x \vDash A \text{ или } x \vDash B$$

Истинность логических связок

- Истинность конъюнкции и дизъюнкции определяется обычным образом:

$$x \vDash A \wedge B \iff x \vDash A \text{ и } x \vDash B$$

$$x \vDash A \vee B \iff x \vDash A \text{ или } x \vDash B$$

- Для определения истинности импликации, введем на множестве состояний **тернарное отношение** R. Тогда

$$x \vDash A \to B \iff \forall y, z, \text{ если } Rxyz \text{ и } y \vDash A, \text{ то } z \vDash B$$

Истинность логических связок

- Истинность конъюнкции и дизъюнкции определяется обычным образом:

$$x \models A \wedge B \iff x \models A \text{ и } x \models B$$

$$x \models A \vee B \iff x \models A \text{ или } x \models B$$

- Для определения истинности импликации, введем на множестве состояний **тернарное отношение** R. Тогда

$$x \models A \to B \iff \forall y, z, \text{ если } Rxyz \text{ и } y \models A, \text{ то } z \models B$$

- $Rxyz$ означает, что *вся информация, содержащаяся в состоянии x, после ее применения в состоянии y содержится в состоянии z.*

Истинность логических связок

- Истинность конъюнкции и дизъюнкции определяется обычным образом:

$$x \vDash A \wedge B \iff x \vDash A \text{ и } x \vDash B$$
$$x \vDash A \vee B \iff x \vDash A \text{ или } x \vDash B$$

- Для определения истинности импликации, введем на множестве состояний **тернарное отношение** R. Тогда

$$x \vDash A \to B \iff \forall y, z, \text{ если } Rxyz \text{ и } y \vDash A, \text{ то } z \vDash B$$

- $Rxyz$ означает, что *вся информация, содержащаяся в состоянии x, после ее применения в состоянии y содержится в состоянии z.*
- Например, в качестве x можно взять состояние, содержащее некоторые законы физики, а в качестве y — начальное состояние какой-нибудь механической системы. Тогда, если z включает в себя все последующие состояния этой системы, мы будем считать, что выполняется $Rxyz$.

Импликация

- Мы хотим добиться того, что если $x' \vDash A \to B$ и $x' \leq x$, то $x \vDash A \to B$. Для этого свяжем отношения $\leq$ и R.

Импликация

- Мы хотим добиться того, что если $x' \vDash A \to B$ и $x' \leq x$, то $x \vDash A \to B$. Для этого свяжем отношения $\leq$ и R.
- Достаточное условие сохранения истинности импликации при расширении состояния выглядит следующим образом:

$$Rxyz, x' \leq x, y' \leq y \text{ и } z' \geq z \Longrightarrow Rx'y'z'$$

.

Отрицание

Перейдем к отрицанию, поскольку именно здесь возникает большинство проблем в интерпретации релевантной логики.

- Очевидно, что в модели, точками которой являются состояния, отрицание не может вести себя классическим образом, а именно:

$$x \vDash \sim A \iff x \nvDash A$$

Отрицание

Перейдем к отрицанию, поскольку именно здесь возникает большинство проблем в интерпретации релевантной логики.

- Очевидно, что в модели, точками которой являются состояния, отрицание не может вести себя классическим образом, а именно:

$$x \vDash {\sim}A \iff x \nvDash A$$

- Состояния могут быть неполными: они могут ничего не знать об истинности или ложности утверждения A.

Отрицание

Перейдем к отрицанию, поскольку именно здесь возникает большинство проблем в интерпретации релевантной логики.

- Очевидно, что в модели, точками которой являются состояния, отрицание не может вести себя классическим образом, а именно:

$$x \vDash {\sim}A \iff x \nvDash A$$

- Состояния могут быть неполными: они могут ничего не знать об истинности или ложности утверждения A.
- Состояния могут быть противоречивы: вполне возможно, что $x \vDash A$ и $x \vDash {\sim}A$.

Отрицание

Перейдем к отрицанию, поскольку именно здесь возникает большинство проблем в интерпретации релевантной логики.

- Очевидно, что в модели, точками которой являются состояния, отрицание не может вести себя классическим образом, а именно:

$$x \models \sim A \iff x \not\models A$$

- Состояния могут быть неполными: они могут ничего не знать об истинности или ложности утверждения A.
- Состояния могут быть противоречивы: вполне возможно, что $x \models A$ и $x \models \sim A$.
- Вместо того, чтобы выяснять, как связаны между собой истинность формулы *не* A и ложность формулы A, дадим новую интерпретацию отрицания.

Совместимость

Для начала приведём некоторые неформальные соображения.

- Рассмотрим состояния x и y, такие что $x \vDash \sim A$ и $y \vDash A$. В таком случае x и y *несовместимы*, поскольку согласно x, A ложно, а согласно y, A истинно. (В случае, когда $x \nvDash A$ и $y \vDash A$, x и y *могут быть совместимы*, поскольку x может не утверждать ни A, ни $\sim A$).

Совместимость

Для начала приведём некоторые неформальные соображения.

- Рассмотрим состояния x и y, такие что $x \models \sim A$ и $y \models A$. В таком случае x и y *несовместимы*, поскольку согласно x, A ложно, а согласно y, A истинно. (В случае, когда $x \not\models A$ и $y \models A$, x и y *могут быть совместимы*, поскольку x может не утверждать ни A, ни $\sim A$).
- Обратно, если $x \not\models \sim A$, то существует некоторое состояние (например, y), которое совместимимо с x и такое что $y \models A$.

Совместимость

Для начала приведём некоторые неформальные соображения.

- Рассмотрим состояния x и y, такие что $x \models {\sim}A$ и $y \models A$. В таком случае x и y *несовместимы*, поскольку согласно x, A ложно, а согласно y, A истинно. (В случае, когда $x \not\models A$ и $y \models A$, x и y *могут быть совместимы*, поскольку x может не утверждать ни A, ни ${\sim}A$).
- Обратно, если $x \not\models {\sim}A$, то существует некоторое состояние (например, y), которое совместимимо с x и такое что $y \models A$.
- Обозначим отношение совместимости C.

Отрицание

Формализуем сказанное на предыдущем слайде.
Пусть C — бинарное отношение на множестве состояний.

- Определим истинность отрицания, используя отношение совместимости C:

$$x \vDash {\sim}A \iff \text{для любого } y, \text{ такого что } xCy, y \nvDash A$$

Отрицание

Формализуем сказанное на предыдущем слайде.
Пусть C — бинарное отношение на множестве состояний.

- Определим истинность отрицания, используя отношение совместимости C:

$$x \models {\sim}A \iff \text{для любого } y, \text{ такого что } xCy, y \not\models A$$

- Свяжем отношение C с отношением $\leq$ следующим образом:

$$\text{Если } xCy \text{ и } x' \leq x, y' \leq y, \text{ то } x'Cy'$$

Отрицание

Формализуем сказанное на предыдущем слайде.
Пусть C — бинарное отношение на множестве состояний.

- Определим истинность отрицания, используя отношение совместимости C:

$$x \vDash {\sim}A \iff \text{для любого } y, \text{ такого что } xCy,\ y \nvDash A$$

- Свяжем отношение C с отношением $\leq$ следующим образом:

$$\text{Если } xCy \text{ и } x' \leq x,\ y' \leq y, \text{ то } x'Cy'$$

- Это означает, что если y совместимо с x, то любая часть y совместима с любой частью x.

Отрицание

Формализуем сказанное на предыдущем слайде.
Пусть C — бинарное отношение на множестве состояний.

- Определим истинность отрицания, используя отношение совместимости C:

$$x \vDash \sim A \iff \text{ для любого } y, \text{ такого что } xCy, y \nvDash A$$

- Свяжем отношение C с отношением $\leq$ следующим образом:

$$\text{Если } xCy \text{ и } x' \leq x, y' \leq y, \text{ то } x'Cy'$$

- Это означает, что если y совместимо с x, то любая часть y совместима с любой частью x.
- Если отношение C удовлетворяет этому условию, то

$$\text{Если } x \vDash \sim A \text{ и } y \geq x, \text{ то } y \vDash \sim A$$

“Неудачные” свойства отношения C

- Отношение C *не рефлексивно* (в общем случае), так как мы хотим, чтобы существовали противоречивые состояния $(x : x \vDash A \wedge \sim A)$.

“Неудачные” свойства отношения C

- Отношение C *не рефлексивно* (в общем случае), так как мы хотим, чтобы существовали противоречивые состояния ($x : x \vDash A \wedge \sim A$).
- Также мы не можем наложить, казалось бы, естественное ограничение:

$$xCy \iff \exists \text{ непротиворечивый } z : x, y \leq z$$

Так как в этом случае противоречивые миры не смогут быть ни с чем совместимы.

“Неудачные” свойства отношения C

- Отношение C *не рефлексивно* (в общем случае), так как мы хотим, чтобы существовали противоречивые состояния $(x : x \vDash A \wedge {\sim}A)$.
- Также мы не можем наложить, казалось бы, естественное ограничение:

$$xCy \iff \exists \text{ непротиворечивый } z : x, y \leq z$$

Так как в этом случае противоречивые миры не смогут быть ни с чем совместимы.

- Однако если мы интерпретируем xCy как “Ничто из того, что содержится в x, не опровергается в y”, то противоречивые состояния всё еще могут быть совместимы с другими.

“Неудачные” свойства отношения C

- Отношение C *не рефлексивно* (в общем случае), так как мы хотим, чтобы существовали противоречивые состояния $(x : x \models A \wedge {\sim}A)$.
- Также мы не можем наложить, казалось бы, естественное ограничение:

$$xCy \iff \exists \text{ непротиворечивый } z : x, y \leq z$$

  Так как в этом случае противоречивые миры не смогут быть ни с чем совместимы.
- Однако если мы интерпретируем xCy как “Ничто из того, что содержится в x, не опровергается в y”, то противоречивые состояния всё еще могут быть совместимы с другими.
  - Например, утверждения одного человека могут не противоречить утверждениям другого, даже если этот человек противоречит сам себе.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash \sim\sim A$.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash \sim\sim A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \vDash \sim A$.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \models y \implies x \models {\sim}{\sim}A$ (пишем $A \vdash {\sim}{\sim}A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \not\models {\sim}{\sim}A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \models {\sim}A$.
    - $y \models {\sim}A \iff \forall z : yCz\ z \not\models A$.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \models y \implies x \models \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \not\models \sim\sim A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \models \sim A$.
    - $y \models \sim A \iff \forall z : yCz\ z \not\models A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \not\models A$.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash {\sim}{\sim}A$ (пишем $A \vdash {\sim}{\sim}A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash {\sim}{\sim}A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \vDash {\sim}A$.
    - $y \vDash {\sim}A \iff \forall z : yCz\ z \nvDash A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \nvDash A$.
- Отношение C **направленно**, то есть $\forall x\ \exists y$: xCy.

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash \sim\sim A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \vDash \sim A$.
    - $y \vDash \sim A \iff \forall z : yCz\ z \nvDash A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \nvDash A$.
- Отношение C **направленно**, то есть $\forall x\ \exists y$: xCy.
  - Это имеет смысл, если мы не рассматриваем абсолютно противоречивое состояние (т. е. такое, в котором все утверждения ложны).

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash \sim\sim A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \vDash \sim A$.
    - $y \vDash \sim A \iff \forall z : yCz\ z \nvDash A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \nvDash A$.
- Отношение C **направленно**, то есть $\forall x\ \exists y$: xCy.
  - Это имеет смысл, если мы не рассматриваем абсолютно противоречивое состояние (т. е. такое, в котором все утверждения ложны).
- Отношение C является **“сходящимся”**

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \vDash y \implies x \vDash \sim\sim A$ (пишем $A \vdash \sim\sim A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \nvDash \sim\sim A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \vDash \sim A$.
    - $y \vDash \sim A \iff \forall z : yCz\ z \nvDash A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \nvDash A$.
- Отношение C **направленно**, то есть $\forall x\ \exists y$: xCy.
  - Это имеет смысл, если мы не рассматриваем абсолютно противоречивое состояние (т. е. такое, в котором все утверждения ложны).
- Отношение C является **“сходящимся”**
  - Идея заключается в том, что если существует состояние, совместимое с x, то существует *максимальное состояние*, совместимое с x. Это можно формализовать так:

Свойства отношения C

На C можно наложить следующие ограничения:

- Отношение C **симметрично**: $xCy \iff yCx$
  - Используя это свойство, докажем, что $x \models y \implies x \models {\sim}{\sim}A$ (пишем $A \vdash {\sim}{\sim}A$)
    - Пусть $xCy \iff yCx$ и $x \not\models {\sim}{\sim}A$.
    - $\exists y : xCy$ и $y \models {\sim}A$.
    - $y \models {\sim}A \iff \forall z : yCz\ z \not\models A$.
    - Выберем в качестве z состояние x. Тогда $x \not\models A$.
- Отношение C **направленно**, то есть $\forall x\ \exists y$: xCy.
  - Это имеет смысл, если мы не рассматриваем абсолютно противоречивое состояние (т. е. такое, в котором все утверждения ложны).
- Отношение C является **“сходящимся”**
  - Идея заключается в том, что если существует состояние, совместимое с x, то существует *максимальное состояние*, совместимое с x. Это можно формализовать так:
  - Если $(\exists y_0)(xCy_0)$, тогда $(\exists y)(xCy \wedge (\forall z)(xCz \implies z \leq y)$.

Звезда Раутли

- Проинтерпретируем звезду Раутли, учитывая все условия, наложенные на отношение C.

Звезда Раутли

- Проинтерпретируем звезду Раутли, учитывая все условия, наложенные на отношение C.
- Если для каждого состояния x найдется состояние, совместимое с ним, то *среди всех таких состояний можно выбрать наибольшее*. Назовем его x^*. Тогда определение отрицания в релевантной логике, использующее звезду Раутли ($x \models {\sim}A \iff x* \not\models A$) эквивалентно определению отрицания, использующему отношение C.

Звезда Раутли

- Проинтерпретируем звезду Раутли, учитывая все условия, наложенные на отношение C.
- Если для каждого состояния x найдется состояние, совместимое с ним, то *среди всех таких состояний можно выбрать наибольшее*. Назовем его x^*. Тогда определение отрицания в релевантной логике, использующее звезду Раутли ($x \vDash \sim A \iff x * \nvDash A$) эквивалентно определению отрицания, использующему отношение C.
  - Действительно, $x^* \nvDash A \iff \forall y : xCy, y \nvDash A$, поскольку $xCy \iff y \leq x^*$.

Звезда Раутли

- Проинтерпретируем звезду Раутли, учитывая все условия, наложенные на отношение C.
- Если для каждого состояния x найдется состояние, совместимое с ним, то *среди всех таких состояний можно выбрать наибольшее*. Назовем его x^*. Тогда определение отрицания в релевантной логике, использующее звезду Раутли ($x \vDash \sim A \iff x^* \nvDash A$) эквивалентно определению отрицания, использующему отношение C.
  - Действительно, $x^* \nvDash A \iff \forall y : xCy, y \nvDash A$, поскольку $xCy \iff y \leq x^*$.
- Другими словами, состояние x^* является *всеобъемлющим* для каждого состояния y, совместимого с x.

Звезда Раутли

- Проинтерпретируем звезду Раутли, учитывая все условия, наложенные на отношение C.
- Если для каждого состояния x найдется состояние, совместимое с ним, то *среди всех таких состояний можно выбрать наибольшее*. Назовем его x^*. Тогда определение отрицания в релевантной логике, использующее звезду Раутли ($x \vDash \sim A \iff x * \nvDash A$) эквивалентно определению отрицания, использующему отношение C.
  - Действительно, $x^* \nvDash A \iff \forall y : xCy, y \nvDash A$, поскольку $xCy \iff y \leq x^*$.
- Другими словами, состояние x^* является *всеобъемлющим* для каждого состояния y, совместимого с x.
- Таким образом, *определение отрицания с помощью звезды Раутли и с помощью отношения C эквивалентны в случае, когда C симметрично, направленно и сходится*.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Заметим, что в определенной нами семантике можно опровергнуть правило дизъюнктивного силлогизма ($A \wedge (\sim A \vee B) \vdash B$).

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Заметим, что в определенной нами семантике можно опровергнуть правило дизъюнктивного силлогизма ($A \wedge (\sim A \vee B) \vdash B$).
  - Для противоречивого состояния x из истинности $A \wedge (\sim A \vee B)$ не следует истинность B, поскольку $x \vDash A \wedge \sim A$.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Заметим, что в определенной нами семантике можно опровергнуть правило дизъюнктивного силлогизма $(A \wedge (\sim A \vee B) \vdash B)$.
  - Для противоречивого состояния x из истинности $A \wedge (\sim A \vee B)$ не следует истинность B, поскольку $x \vDash A \wedge \sim A$.
- Тем не менее, дизъюнктивный силлогизм верен, если рассматривать его не на всём множестве состояний S, а на *множестве миров W*.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Заметим, что в определенной нами семантике можно опровергнуть правило дизъюнктивного силлогизма $(A \wedge (\sim A \vee B) \vdash B)$.
  - Для противоречивого состояния x из истинности $A \wedge (\sim A \vee B)$ не следует истинность B, поскольку $x \vDash A \wedge \sim A$.
- Тем не менее, дизъюнктивный силлогизм верен, если рассматривать его не на всём множестве состояний S, а на *множестве миров W*.
- Ранее мы отказались от семантики возможных миров, для того чтобы иметь возможность работать с неполными и противречивыми множествами. Однако нам хотелось бы иметь "реальный мир" и/или "части реального мира" в качестве точек нашей модели.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Будем говорить, что элемент множества состояний w является **миром**, если он непротиворечивый (т. е. wCw) и наибольший (т. е. если wCz, то $z \leq w$). Тогда множество всех состояний z, таких что $z \leq w$, будет представлять собой множество миров. Все эти миры включим в **единый мир** W.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Будем говорить, что элемент множества состояний w является **миром**, если он непротиворечивый (т. е. wCw) и наибольший (т. е. если wCz, то $z \leq w$). Тогда множество всех состояний z, таких что $z \leq w$, будет представлять собой множество миров. Все эти миры включим в **единый мир** W.
- Имеет место интересный факт: *для любого мира* W, $W \Vdash \sim A$ *тогда и только тогда, когда* $W \nVdash A$. Т. е. на множестве миров отрицание ведёт себя классическим образом.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Будем говорить, что элемент множества состояний w является **миром**, если он непротиворечивый (т. е. wCw) и наибольший (т. е. если wCz, то $z \leq w$). Тогда множество всех состояний z, таких что $z \leq w$, будет представлять собой множество миров. Все эти миры включим в **единый мир** W.
- Имеет место интересный факт: *для любого мира* W*,* $W \Vdash {\sim}A$ *тогда и только тогда, когда* $W \nVdash A$. Т. е. на множестве миров отрицание ведёт себя классическим образом.
- Более того, это свойство не зависит от рассматриваемой логики и от свойств отрицания в ней.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *“Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A”*.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *"Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A"*.
- Согласно данному определению, $\vdash_W$ - это классическая истинность на фрагменте языка, включающем $\wedge$, $\vee$ и $\sim$.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *“Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A”*.
- Согласно данному определению, $\vdash_W$ - это классическая истинность на фрагменте языка, включающем $\wedge$, $\vee$ и $\sim$.
- Как следствие этого факта, дизъюнктивный силлогизм выполняется в следующей форме:

$$A, \sim A \vee B \vdash_W B$$

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *“Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A”*.
- Согласно данному определению, $\vdash_W$ - это классическая истинность на фрагменте языка, включающем $\wedge$, $\vee$ и $\sim$.
- Как следствие этого факта, дизъюнктивный силлогизм выполняется в следующей форме:

$$A, \sim A \vee B \vdash_W B$$

- Для доказательства рассмотрим два случая:

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *“Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A”*.
- Согласно данному определению, $\vdash_W$ - это классическая истинность на фрагменте языка, включающем $\wedge$, $\vee$ и $\sim$.
- Как следствие этого факта, дизъюнктивный силлогизм выполняется в следующей форме:

$$A, \sim A \vee B \vdash_W B$$

- Для доказательства рассмотрим два случая:
  1. $x \vDash B$. Тогда $A, \sim A \vee B \vdash_W B$.

Миры и дизъюнктивный силлогизм

- Определим $\Sigma \vdash_W A$ следующим образом: *“Для всех миров W, в которых каждый элемент множества формул Σ истинен, истинно и A”*.
- Согласно данному определению, $\vdash_W$ - это классическая истинность на фрагменте языка, включающем $\wedge$, $\vee$ и $\sim$.
- Как следствие этого факта, дизъюнктивный силлогизм выполняется в следующей форме:

$$A, \sim A \vee B \vdash_W B$$

- Для доказательства рассмотрим два случая:
  1. $x \vDash B$. Тогда $A, \sim A \vee B \vdash_W B$.
  2. $x \vDash \sim A$. Так как миры непротиворечивы и xA, то не может быть такого, что $x \vDash \sim A$, а значит, $x \vDash B$.

О булевом отрицании

- Рассмотрим нашу стандартную модель с множеством всех состояний S. Можем ли мы *не* добавлять связку $-$ (булево отрицание), определенную следующим образом:
  $$x \models -A \iff x \not\models A$$
  ко множеству наших связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim$?

О булевом отрицании

- Рассмотрим нашу стандартную модель с множеством всех состояний S. Можем ли мы *не* добавлять связку $-$ (булево отрицание), определенную следующим образом:

  $$x \models -A \iff x \not\models A$$

  ко множеству наших связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim$?
- Булево отрицание удовлетворяет условиям $A \wedge -A \vdash B$ и $A \vdash B \vee -B$, не влияя при этом на поведение остальных логических связок. Это означает, что можно было бы расширить релевантную логику, добавив к ней булево отрицание. Однако для рассматриваемых нами моделей нет никакой гарантии, что если $x \not\models A$ и $x \leq y$, то $y \not\models A$, поскольку если состояние x неполно и расширяется состоянием y, то некоторые утверждения, об истинности которых не знал x, после добавления новых высказываний (дополнительной информации) могут стать истинными для y.

О булевом отрицании

- Это означает, что либо утверждения, использующие булево отрицание, не сохраняются при расширении состояний, либо что отношение включения $\leq$ сводится к отношению равенства. Это приводит к тому, что *состояния становятся мирами*, а мы не хотим этого по соображениям, обсуждавшимся ранее.

О булевом отрицании

- Это означает, что либо утверждения, использующие булево отрицание, не сохраняются при расширении состояний, либо что отношение включения $\leq$ сводится к отношению равенства. Это приводит к тому, что *состояния становятся мирами*, а мы не хотим этого по соображениям, обсуждавшимся ранее.
- Вероятно, единственная причина, по которой нам хотелось бы расширить релевантную логику с помощью булева отрицания, заключается в том, что *логика без булева отрицания недостаточно "выразительна"* для того, чтобы выводить определенные вещи, например, дизъюнктивный силлогизм. Но ранее мы видели, как это можно сделать, не выходя при этом за рамки нашей интерпретации релевантной логики.

О булевом отрицании

Таким образом, нет смысла расширять наш язык с помощью булева отрицания. Семантика состояний достаточно богата для того, чтобы закодировать два разных вида истинности, одна из которых обладает всеми преимуществами (и, конечно же, всеми недостатками) классической истинности.

Литература

G. Restall “Negation in Relevant Logic (How I stopped worrying and learned to love the Routley Star)” [Gabbay Wansing, eds. 1999: What is Negation?]