

Лекция 9

Перечисление в 2d-NSE

$u(t, x)$,

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi \mathbb{Z}^2$

9.1

$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x)) \in \mathbb{R}^2$ — скорость вращающейся несжимаемой жидкости на $\mathbb{T}^2$.

(NSE) $\ddot{u} - \nabla \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f$ — 3 неизвестных, 2 уравнения.
 (II закон Ньютона)
 $(u_1 \partial_{x_1} + u_2 \partial_{x_2}) u$
 $p(t, x) \in \mathbb{R}$ — давление, $f(t, x) \in \mathbb{R}^2$ — внешняя сила,
 ↑
 ур-е Навье-Стокса

(ур-е неразрывности) $\operatorname{div} u = 0$ (закон сохранения массы).
 $\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2$

(NSE) + (ур-е неразрывности) + $u(0, x) = u_0(x)$ — задача Коши для 2d-NSE.

Мы будем работать в пр-ве

$H = \{ v \in L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) : \operatorname{div} v(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{T}^2 \}$, $\|v\|^2 = \int_{\mathbb{T}^2} |v(x)|^2 dx$

Производные понимаются в обобщенном смысле.

Замечание 1. H совпадает с замыканием в $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ пространства

$\mathcal{V} = \{ v \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) : \operatorname{div} v(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{T}^2 \}$

Наст также поговорим про-во

$H^1 = \{ \overset{(v_1, v_2)}{v} \in L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) : \nabla v_1, \nabla v_2 \in L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2) \text{ и } \operatorname{div} v = 0 \}$. Норма:

— первое Соболевское пр-во с гом. условием $\operatorname{div} v = 0$. $\|v\|_1^2 = \int_{\mathbb{T}^2} |v|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2 dx$

Эти пр-ва хорошо воспринимаются в Фурье. Имеем

$v(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} v_s e^{is \cdot x}$, $v_s \in \mathbb{C}^2$.

Тогда

$H = \{ v : \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} |v_s|^2 < \infty, \ s \cdot v_s = 0 \text{ и } v_{-s} = \bar{v}_s, \ \forall s \in \mathbb{Z}^2 \}$,
 $\downarrow$ $\operatorname{div} v = 0$ $\downarrow$ $v \in \mathbb{R}^2$

$$H^1 = \left\{ v: \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} |s|^2 |v_s|^2 < \infty, \quad S \cdot v_s = 0, \quad v_s = \bar{v}_{\bar{s}} \quad \forall s \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

9.2

$$\|v\|^2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} |v_s|^2, \quad \|v\|_1^2 = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} (1 + |s|^2) |v_s|^2$$

станд. собственная пр-ва, определенная аналогично H^1 , но без условия $\operatorname{div} v = 0$.

Проекция Перэ

$$\text{Пусть } \nabla \mathcal{H}^1 = \left\{ v: v = \nabla q \text{ для некоторого } q \in \mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \right\}$$

взаимно ортогональные

Теорема 3 (Гельфанда)

$\nabla \mathcal{H}^1, H$ - замкнутые пр-ва в $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{T}^2)$,

5.1.1 при этом имеют место ортогональная декомпозиция

$$L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{T}^2) = H \oplus \nabla \mathcal{H}^1$$

Пусть $\Pi: L^2 \rightarrow H$ - ортогональный проектор (проекция Перэ).

Задача 2 Докажите часть теоремы 5: что $\Pi \nabla q = 0 \quad \forall q \in \mathcal{H}^1$ (т.е. что $\Pi \nabla \mathcal{H}^1 = 0$).

Применим проекцию Π к уравнению (NSE) с $f=0$:

$$(1) \quad u_t - \nabla \cdot Lu + B(u) = 0, \quad \text{где } Lu := \Pi \Delta u, \quad B(u) = \Pi((u \cdot \nabla)u).$$

(уравнение (1))

Теорема 4 (5.1.1) Для каждого решения $u \in L^2(0, T; H^1)$, такое что

$u_t \in L^2(0, T; H^{-1})$, существует $p \in L^2(0, T; L^2)$, такое что

(u, p) - решение (NSE) + (уравнение неразрывности).

H^{-1} - пр-во обобщенных функций, коэф. Фурье которых удовлетворяют

$$\sum |u_s|^2 |s|^{-2} < \infty, \quad \text{и } L^2(0, T; X) := \left\{ f(t, x): \int_0^T \|\hat{f}(t, x)\|_X^2 dt < \infty \right\}$$

Теорема 5 ($B \setminus FA$) Пусть $T > 0$ и $u_0 \in H$. Тогда задача Коши для ур-ия 9.3

(1) имеет единственное решение, лежащее в пр-ве $\{u \in L^2(0, T; H^1) : \dot{u} \in L^2(0, T; H^{-1})\}$. В частности, $u(t) \in H \forall t \in [0, T]$.

это следует из того, что это пр-во вложено в $C(0, T; H)$.

Обозначим $F : H \rightarrow H$, $F(u_0(x)) = u(1, x; u_0)$ — решение ур-ия (1) при $t=1$ с начальным условием u_0 .

Лемма 6 [1] $\exists 0 < q < 1$, такое что $\|F(u)\| \leq q \|u\| \forall u \in H$. (диссипативна)

(5 \setminus 5.4) [2] $\forall R > 0 \exists C_R > 0$, т.е. $\|F(u_1) - F(u_2)\|_1 \leq C_R \|u_1 - u_2\| \forall u_1, u_2 \in B_R^H$.
 лок. липшицевость со сглаживанием. Норма в H^1 шар радиуса R в H с центром в нуле.
Норма в H

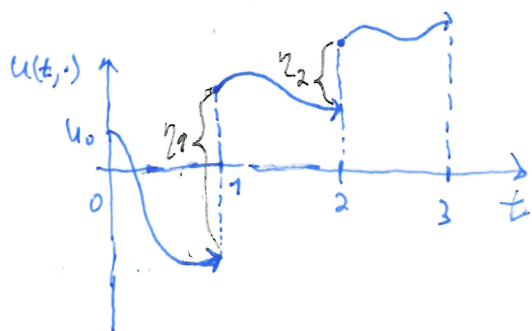
Рассмотрим случайное возмущение ур-ия (1) с помощью kick-force:

2) $\dot{u} \rightarrow \gamma Lu + B(u) = \eta(t)$, где $\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \delta(t-k-1)$, $\eta_k \in H$, i.i.d.
 independent identically distributed

Уравнение (2) можно воспринимать как уравнение в обобщенных функциях,

но удобнее воспринимать (2) как формальную запись интегрального ур-ия
 в классических ф-циях, получаемого формальным интегрированием (2):

$$(3) u(t) = u_0 + \int_0^t (\gamma(Lu(s)) + B(u(s))) ds = \sum_{k=1}^{[t]} \eta_k.$$



Таким образом, полагая

$u_0, u_1 := u(1, \cdot; u_0), u_2 := u(2, \cdot; u_0), \dots$

образует случайную динамическую систему в H :

$$(4) u_{n+1} = F(u_n) + \eta_n,$$

которую мы и будем изучать.

Как сконструировать с.в. η_n ?

нормы в H и H^1 , записанные в этой базе, имеют вид (*) с точностью до умножения на константу

9.4

Пусть
$$e_s(x) = \begin{cases} c_s s^\perp \sin s \cdot x, & \text{если } s \in \mathbb{Z}_+^2 := \{(s_1, s_2): s_1 > 0 \text{ или } s_1 = 0, s_2 > 0\} \\ c_s s^\perp \cos s \cdot x, & \text{если } s \in -\mathbb{Z}_+^2, \end{cases} \quad \text{а } e_0(x) = \frac{1}{2\pi}.$$

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}_+^2 \cup (-\mathbb{Z}_+^2) \cup \{0\}, \quad s^\perp = (-s_2, s_1),$$

Задача 7 Проверьте, что $(e_s)_{s \in \mathbb{Z}^2}$ образует ортонормированный базис в H .
при произвольном выборе констант c_s .

Выберем η_n в виде
$$\eta_n = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} b_s \zeta_{ns} e_s, \quad \text{где } b_s \in \mathbb{R} \text{ — такие, что } \sum b_s^2 < \infty, \text{ а } \zeta_{ks} \in \mathbb{R}^2 \text{ iid.}$$

Как и в задаче 5.6, используя свойство диссипации (лемма 6(1)) найдем $R_* > 0$, такое что если $\text{supp } \Phi(u_0) \subset B_R^H$ для какого-нибудь $R > 0$, то $\exists k_* = k_*(R)$, такое что

$$P(u_k \in B_{R_*}^H \quad \forall k \geq k_*) = 1.$$

Более того, если $R > R_*$, то $k_* = 0$.

Тогда, как и в лекции 5, ограничивая динамику из шар $B_{R_*}^H$, то есть предполагая, что $\text{supp } \Phi(u_0) \in B_{R_*}^H$ и работаем с мерой из $\mathcal{P}(B_{R_*}^H)$.

Далее обозначим $B_* := B_{R_*}^H$

$$\|\eta_n\| = \sum b_s^2 \zeta_{ns} < \infty \text{ почти наверное, т.е. } \eta_n \in H \text{ п.н.}$$

Предположение С.в. ζ_{ks} имеют п.н. S с компактным носителем и $P(0) > 0$.

Теорема 8 [1] Систему (4) имеет по крайней мере одну стационарную меру μ , и μ удовлетворяет $\mu \in \mathcal{P}(B_*)$.

см. лекция 4

[2] $\exists N \geq 1$, такое, что при условии $b_s \neq 0 \quad \forall |s| \leq N$, стационарная мера μ единственна.

Более того, система (4) перемешивает в дуально-линейцевой метрике: $\exists C > 0, 0 < \gamma < 1$, такие, что
$$\|S_k^* \lambda - \mu\|_{\mathcal{L}^*} \leq C \gamma^k \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}(B_*) \text{ и } \forall k \geq 0.$$

Задача 9

Если $u_0 \perp \{u_k\}$ и $E \|u_0\| < \infty$, то

9.5

$$\sup_{\|f\|_{L_2} \leq 1} |E f(u_k) - \langle f, H \rangle| \leq C_1 (1 + E \|u_0\|) \gamma^k, \quad k \geq 0.$$

(разница с теоремой в том, что я не предполагаю, что $\text{supp } \Phi(u_0) \subset B_*$)

Сходимость в теореме 8 имеет место в ℓ_2 -нормированной метрике, но не в метрике полной вариации. Это связано с отсутствием плотности нф бесконечномерном пр-ве (т.е. $H \notin H$).

Напомним схему док-ва теоремы 5.7, аналогичной теореме 8, но работающей в случае СФНС из конечномерного пр-ва $\mathbb{R}^n$.

а) Задаст диссипацию, условие $\rho(0) > 0$, функцию $P(\|u_k\| < \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, для которого $\delta > 0$ найдется K_δ , такое что $P(u_{K_\delta} \in B_\delta) > 0$.

$$\delta) \sup_{v_1, v_2 \in B_\delta} \|\Sigma_1(v_1) - \Sigma_1(v_2)\|_{\text{var}} < 1 \quad \text{при } \delta < 1.$$

Это следует из непрерывной н-ти ρ у с.в. $u_k \in \mathbb{R}^n$ и условия $\rho(0) > 0$

б) Комбинируя (а) и (б) находим $m > 0$, т.е.

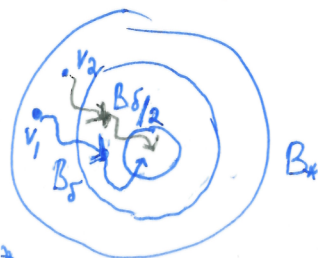
$$\sup_{v_1, v_2 \in B_\delta} \|\Sigma_m(v_1) - \Sigma_m(v_2)\|_{\text{var}} < \gamma < 1$$

г) (б) + лемма Добрушина $\left(\forall \lambda_{1,2} \in \mathcal{P}(B_*) \right), \lambda_i = \delta \nu_i + (1-\delta) \nu, \text{ где } \delta = \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\text{var}}, \nu_i, \nu \in \mathcal{P}(B_*), \nu_1 \perp \nu_2$

$$\text{тогда} \quad \|\Sigma_m^* \lambda_1 - \Sigma_m^* \lambda_2\| \leq \gamma \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\text{var}}, \quad \gamma < 1.$$

а) ОК. б) Нет — в бесконечномерном пространстве нет плотности.

Поэтому вместо б) имеем



$$\delta') \sup_{v_1, v_2 \in B_\delta} \sup_{k \geq 0} \|\Sigma_k(v_1) - \Sigma_k(v_2)\|_L^* \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Значит, что нам не достаточно иметь малость $\|\Sigma_k(v_1) - \Sigma_k(v_2)\|_L^*$ для какого-нибудь фиксированного k , так как в бесконечномерном пространстве нет плотности. Поэтому — $\sup_{k \geq 0}$.

Вместо б), г):

$$\delta') \exists 0 < \alpha < 1, \text{ т.е. } \sup_{v_1, v_2 \in B_k} \|\Sigma_k(v_1) - \Sigma_k(v_2)\|_L^* \leq C \alpha^k, \forall k$$

$$\gamma') \forall k \geq 0, \quad \|\Sigma_k^* \lambda_1 - \Sigma_k^* \lambda_2\|_L^* \leq C \alpha^k, \quad \forall \lambda_{1,2} \in P(B_k)$$

Далее будет обдумываться только доказательство пункта $\delta')$.

Пусть (w_k^1, w_k^2) — произвольный кандидат гласкер $(\Sigma_k(v_1), \Sigma_k(v_2))$

$$\text{То-есть } \|\Sigma_k(v_1) - \Sigma_k(v_2)\|_L^* = \sup_{\|f\|_{L^1} \leq 1} |\mathbb{E} f(w_k^1) - \mathbb{E} f(w_k^2)| \quad (5)$$

Конкретно, $w_k^j = W_k^j(v_1, v_2)$.

Лемма 10 Кандидаты (w_k^1, w_k^2) можно выбрать так, что

$$\sup_{v_1, v_2 \in B_\delta} \mathbb{P}(\|w_k^1 - w_k^2\| \leq 2^{-k} \|v_1 - v_2\| \quad \forall k \geq 0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 1$$

На самом деле, док-во использует только то $\|v_1 - v_2\| \geq 2\delta$.
Лемма 10

$\delta')$ следует из леммы 10, но 2^{-k} нужно как жидкость — так как $\delta(\delta', \delta')$.

Из леммы 10 и (5) следует, что для $v_1, v_2 \in B_\delta$,

9.7

$$\|\Sigma_F(v_1) - \Sigma_F(v_2)\|_1^2 = |\mathbb{E}(\mathbb{I}_{G_k^+} - \mathbb{I}_{G_k^c})(f(w_k^1) - f(w_k^2))|$$

$$\leq 2^{-k} \underbrace{\|v_1 - v_2\|}_{\leq 2\delta} + 2\mathbb{P}(G_k^c) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Схема доказательства леммы 10:

- $\exists$ канонический (R_1, R_2) , $R_j = R_j(v_1, v_2)$, где пер

$(\Sigma_1(v_1), \Sigma_1(v_2))$ и $C > 0$, т.е.

оптого проекция на $\text{span}\{e_s, 1 \leq s \leq N\}$.

$$(6) \mathbb{P}(\|R_1 - R_2\| > \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|) \leq C\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in B_*$$

Действительно, выберем $N \gg 1$, такое что $\|(I - P_N)(F(v_1) - F(v_2))\| \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|$.

Это следует, так как

$$\|(I - P_N)(F(v_1) - F(v_2))\| \leq N^{-1}\|F(v_1) - F(v_2)\|_1 \leq N^{-1}\|F(v_1) - F(v_2)\|_1 \leq N^{-1}C\|v_1 - v_2\|,$$

согласно лемме 6(2).

$$\text{Пусть } \lambda_j = \mathbb{D}(P_N(F(v_j) + \eta_1)), \quad j=1,2.$$

Выберем максимальный канонический

$$Z_1(v_1, v_2), \quad Z_2(v_1, v_2) \text{ где } \lambda_1, \lambda_2.$$

Положим

$$R_j = Z_j + (I - P_N)(F(v_j) + \eta_1), \quad j=1,2, \text{ где } \eta_1 \text{ выберем}$$

независимым от Z_1, Z_2 .

Задача 11 (R_1, R_2) - канонический для $\Sigma_1(v_1), \Sigma_1(v_2)$.

$$\mathbb{P}(\|R_1 - R_2\| > \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|) \leq \mathbb{P}(Z \neq Z') = \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\text{var}}.$$

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\text{var}} = 1 - \int_{\mathbb{R}^{\tilde{N}}} \min(\overset{\text{плотность } \lambda_1}{P_{\lambda_1}}, P_{\lambda_2})(x) dx \leq C_N \|V_1 - V_2\|, \quad \text{где} \quad \boxed{9.8}$$

$\tilde{N} = \dim \text{span}\{e_s, |s| \leq N\}$

так как $P_{\lambda_j}(x) = P_{P_N \chi_1}(x - P_N F(V_j))$.

Уточня, мы получили (6). $\rightarrow$ имеет м.т.б, так как $b_s \neq 0$ при $|s| \leq N$.

Далее компоненты w_k^1, w_k^2 строятся аналогично предыдущим:

$$w_k^j = R_j(w_{k-1}^1, w_{k-1}^2; \tilde{w}_k), \quad j=1,2$$

$$w_1^j = R_j(v_1, v_2; \tilde{w}_1)$$