Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 11. Метод проекционных операторов. Уравнение Накажимы — Цванцига

Теретёнков Александр Евгеньевич

18 апреля 2023 г.

В прошлый раз...

Теорема 1

Пусть интеграл $G(t)$ — непрерывная функция с конечными моментами $\int_0^\infty t^p G(t)dt$ вплоть до $(m+1)$-го включительно для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $\Delta\Omega_\lambda^{(m)} \in \mathbb{R}$ и $\Gamma_\lambda^{(m)} \geqslant 0$ (по крайней мере при достаточно малых λ) и такое решение $\rho^{(m)}(t;\lambda)$ уравнения

$$\frac{d}{dt}\rho^{(m)}(t;\lambda) = \mathcal{L}_\lambda^{(m)}(\rho^{(m)}(t;\lambda)),$$

$$\mathcal{L}_\lambda^{(m)}(\rho) = -i[\Delta\Omega_\lambda^{(m)}\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma_\lambda^{(m)}\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right),$$

что $\rho(t;\lambda) = \rho^{(m)}(t;\lambda) + O(\lambda^{2m+2})$ при $\lambda \to 0$ и $t > 0$ ($t = \mathrm{fix}$).

А если какого-то момента не существует?

Рассмотрим случай

$$G(t) = g^2\Bigg(\chi e^{-\gamma|t|} +$$
$$+ \frac{1-\chi}{2}\Bigg(e^{-\gamma|t|}(1 - \operatorname{Im}\operatorname{erf}(i\sqrt{\gamma|t|})) + e^{\gamma|t|}(1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\gamma|t|}))\Bigg)\Bigg),$$

где $\chi \in (0,1)$. Она имеет нулевой момент $\tilde{G}_0 = \chi\frac{g^2}{\gamma}$, но первый момент $\tilde{G}_1$ расходится:

$$\rho_{11} = |x(t;\lambda)|^2, \qquad x(t;\lambda) = x_0(t) + \lambda x_{\frac{1}{2}}(t) + O(\lambda^2),$$

где

$$x_0(t) = e^{-\chi\frac{g^2}{\gamma}t}, \qquad x_{\frac{1}{2}}(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}), t \to +\infty$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Базовый пример:
Гамильтониан

$$H = H_0 + \lambda H_I$$

Уравнение Лиувилля-фон Неймана в представлении взаимодействия

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t, \qquad \mathcal{L}_t = -i[H_I(t), \cdot], \qquad H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Базовый пример (Argyres, Kelley, 1964)

$$\mathcal{P}\rho = \mathrm{Tr}_B\, \rho \otimes \rho_B$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Утверждение. Уравнение Накажимы-Цванцига (Nakajima, 1958; Zwanzig, 1960):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t}\mathcal{K}_s^t\rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}, \qquad \mathcal{I}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{T}}\mathrm{exp}\left(\lambda\int_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Доказательство. Распишем уравнение Лиувилля-фон Неймана в проекциях

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \\ \frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho_t = \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение, имеем

$$\mathcal{Q}\rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda \int_{t_0}^t \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds,$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{Texp}} \left(\lambda \int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau \right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Подставляя в первое уравнение, получаем уравнение Накажимы-Цванцига

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{P}\rho_t + \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda^2 \int_{t_0}^t \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_s \mathcal{P}\rho_s ds$$

$\square$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t),\rho_S\otimes\rho_B])\otimes\rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S]\otimes\rho_B$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho_S \otimes \rho_B]) \otimes \rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S] \otimes \rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.
Это выполнено в случае, когда рассматривается гауссовский бозонный резервуар с нулевым средним, а $H_I(t)$ — линеен по операторам рождения и уничтожения. Более того, в этом случае обнуление моментов нечётного порядка даёт

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1} \cdots \mathcal{L}_{t_{2k}}\mathcal{P} = 0,$$

что также часто предполагается.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Член $\mathcal{I}_t \rho_{t_0}$ характеризует насколько начальное состояние согласовано с проекцией. Если $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то $\mathcal{I}_t \rho_{t_0} = 0$. В случае проектора $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$ соответствует факторизованным начальным состояниям вида $\rho_{t_0} = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Если $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$ и $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то первый неисчезающий член — второго порядка по λ

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + O(\lambda^3)$$

С учётом $\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds$$

— уравнение в приближении Борна.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

В случае $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, то оно принимает вид

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) \otimes \rho_B = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds \otimes \rho_B$$

"Сокращая" на ρ_B, имеем

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds$$

— такое уравнение уже возникало при "физическом" выводе уравнений.

Локальное по времени уравнения

Теорема 2 (Метод устранения временной свёртки)

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}(t)\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho_{t_0},$$

где $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$*,*

$$\mathcal{K}(t) \equiv \left(\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P})^{(-1)},$$

$$\mathcal{I}(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q} - \mathcal{K}(t)\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

где $\mathcal{U}_{t_0}^t$ *— решение задачи Коши* $\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{t_0}^t = \lambda\mathcal{L}_t\mathcal{U}_{t_0}^t, \mathcal{U}_{t_0}^{t_0} = I$*, при достаточно малых* t *или* λ*.*