Мультипликаторы в пространство SL^∞ для произвольных фильтраций

А. Целищев

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, а $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ — фильтрация на нём. Для произвольной функции g на Ω мартингальная квадратичная функция определяется следующим образом:

$$S(g) = \Big(\sum_{n\geq 1} |\Delta_n g|^2\Big)^{1/2},$$

где через Δ_n обозначены мартингальные разности. Условная мартингальная квадратичная функция определяется похожим образом:

$$\sigma(g) = \Big(\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(|\Delta_n g|^2 | \mathcal{F}_{n-1})\Big)^{1/2}.$$

Хорошо известно, что операторы S и σ не ограничены на пространстве L^∞.

Рассмотрим произвольную функцию f, $0 \leq f \leq 1$. Мы обсудим следующий вопрос: можно ли найти такую функцию (мультипликатор) m, $0 \leq m \leq 1$, что $\mathbb{E}(mf) \geq c\mathbb{E}f$, и при этом квадратичная функция $S(mf)$ (или $\sigma(mf)$) равномерно ограничена? Мы покажем, как явным образом *построить* такую функцию m для обоих операторов S и σ — при этом не накладывая никаких условий регулярности на фильтрацию $\{\mathcal{F}_n\}$. Кроме того, оказывается, что в случае оператора S, применяя абстрактную теорему об исправлении С. В. Кислякова, можно добиться намного большего: а именно, чтобы функция m была равна 1 на множестве меры, сколь угодно близкой к 1. Однако, "расплатой" за такое более сильное утверждение является его неконструктивность: для доказательства используется двойственность и теорема Хана–Банаха.