Теория истины по Крипке

Вельмакин Г.С.

МФТИ

2023

Синтаксис

L – фиксированный первопорядковый язык, снабжённый:

1. Бесконечным множеством переменных $x, y, z, \ldots$;
2. Бесконечным множеством константных символов $a, b, c, \ldots$;
3. Требуемыми предикатами (включая равенство);
4. Логическими связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и $\supset$;
5. Кванторами $\forall$ и $\exists$.

Синтаксис

L – фиксированный первопорядковый язык, снабжённый:

1. Бесконечным множеством переменных $x, y, z, \ldots$;
2. Бесконечным множеством константных символов $a, b, c, \ldots$;
3. Требуемыми предикатами (включая равенство);
4. Логическими связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и $\supset$;
5. Кванторами $\forall$ и $\exists$.

Замечание. Если наш язык L будет языком PA, то для дальнейшего изложения будет удобнее обогатить наш язык не функциональными символами s^1, $+^2$ и $\cdot^2$, а соответствующими нумералами.

Истинностный предикат и цитирующий механизм

1. Истинностный предикат (англ. truth predicate) (одноместный) T;
2. Цитирующий механизм (англ. quotation device) (одноместный) ‘’, который отображает предложения в термы (по аналогии с Гёделовой нумерацией):

$$‘’ : St(L) \rightarrow Tm(L)$$

Будем интерпретировать ‘A’ как *имя предложения* A.

Истинностный предикат и цитирующий механизм

1. Истинностный предикат (англ. truth predicate) (одноместный) T;
2. Цитирующий механизм (англ. quotation device) (одноместный) ‘’, который отображает предложения в термы (по аналогии с Гёделовой нумерацией):

$$`\,' : St(L) \to Tm(L)$$

   Будем интерпретировать ‘A’ как *имя предложения* A.

Мы будем требовать, чтобы интерпретации предиката T были его неподвижными точками (англ. fixed point):

A и T‘A’ должны, как минимум, иметь одно и то же семантическое значение для любого предложения A языка L.

Замечание. Мы налагаем дополнительное требование на вид формулы: она обязана быть *замкнутой*.

Предложение (англ. statement) есть замкнутая формула.

Множество термов обозначим $Tm(L)$.
Множество формул обозначим $Fm(L)$.
Множество предложений обозначим $St(L)$.

Интерпретация языка L

Пусть у нас есть пара $\langle D, I\rangle$, где D — непустое множество, а I задаёт классическую интерпретацию для всех нелогических констант языка L:

1. Если a — индивидная константна, то $I(a) \in D$;
2. Если P — n-арный предикатный символ, то $I(P)$ есть подмножество в D^n.

Проблема интерпретации языка L посредством классической, двузначной логикой

Мы можем допустить, что D содержит все предложения языка L, и для любого предложения A языка L, $I(‘A’) = A$.

Проблема интерпретации языка L посредством классической, двузначной логикой

Мы можем допустить, что D содержит все предложения языка L, и для любого предложения A языка L, $I(`A') = A$.

Вопрос: сможем ли найти интерпретацию T, которая была бы согласована с требованием, которое мы наложили выше на неподвижную точку?

Проблема интерпретации языка L посредством классической, двузначной логикой

Мы можем допустить, что D содержит все предложения языка L, и для любого предложения A языка L, $I(`A') = A$.

Вопрос: сможем ли найти интерпретацию T, которая была бы согласована с требованием, которое мы наложили выше на неподвижную точку?

Ответ: если мы ограничим себя только классической, двузначной интерпретацией, то ответ, в общем случае, будет отрицательный.

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg Tk$.

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg \mathrm{T}k$.

Тогда предложения T‘$\neg \mathrm{T}k$’ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения.

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg \mathrm{T}k$.

Тогда предложения $\mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения. Действительно, $I(`\neg \mathrm{T}k') = \neg \mathrm{T}k$ (по требованию выше);

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg \mathrm{T}k$.

Тогда предложения $\mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения. Действительно, $I(`\neg \mathrm{T}k') = \neg \mathrm{T}k$ (по требованию выше); $I(`\neg \mathrm{T}k') = \neg \mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ (по нашему определения I для индивидных констант).

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg \mathrm{T}k$.

Тогда предложения $\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения. Действительно, $I(`\neg\mathrm{T}k') = \neg\mathrm{T}k$ (по требованию выше);
$I(`\neg\mathrm{T}k') = \neg\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$ (по нашему определения I для индивидных констант). Как итог, $\neg\mathrm{T}k = \neg\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$, откуда, $\mathrm{T}k = \mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$.

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg\mathrm{T}k$.
Тогда предложения $\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения. Действительно, $I(`\neg\mathrm{T}k') = \neg\mathrm{T}k$ (по требованию выше); $I(`\neg\mathrm{T}k') = \neg\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$ (по нашему определения I для индивидных констант). Как итог, $\neg\mathrm{T}k = \neg\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$, откуда, $\mathrm{T}k = \mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$.
Но с другой стороны, если мы интерпретируем T в классическом смысле, то $\mathrm{T}k$ и $\neg\mathrm{T}k$ не могут иметь одинаковую оценку, а значит её не могут иметь $\mathrm{T}`\neg\mathrm{T}k'$ и $\neg\mathrm{T}k$.

Парадокс. Рассмотрим пример, связанный с парадоксом лжеца.

Example

Пусть k — индивидная константа, и $I(k) = \neg \mathrm{T}k$.
Тогда предложения $\mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ и $\mathrm{T}k$ обязаны иметь одинаковые истинностные значения. Действительно, $I(`\neg \mathrm{T}k') = \neg \mathrm{T}k$ (по требованию выше);
$I(`\neg \mathrm{T}k') = \neg \mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ (по нашему определения I для индивидных констант). Как итог, $\neg \mathrm{T}k = \neg \mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$, откуда, $\mathrm{T}k = \mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$.
Но с другой стороны, если мы интерпретируем T в классическом смысле, то $\mathrm{T}k$ и $\neg \mathrm{T}k$ не могут иметь одинаковую оценку, а значит её не могут иметь $\mathrm{T}`\neg \mathrm{T}k'$ и $\neg \mathrm{T}k$.

Преодоление. Инструмент, который использовал Крипке, чтобы решить данное затруднение, была трёхзначная логика: некоторые предложения будут иметь определённые истинностные оценки (истина или ложь); остальные — нет (или мы можем сказать, что они имеют третье истинностное значение).

Интерпретация языка L с использованием трёхзначной логики

Definition

Модель для языка L есть тройка $M = \langle D, I, X \rangle$, где:

1. $\langle D, I \rangle$ есть классическая интерпретация для всех нелогических констант языка L, за исключением T:
   1.1. Если a — индивидная константна, то $I(a) \in D$;
   1.2. Если P — n-арный предикатный символ, то $I(P)$ есть подмножество в D^n.
2. X есть функция из D в трёхэлементное множество $\{t, f, *\}$.
   X отвечает за интерпретацию истинностного предиката в M.

Definition

Пару $\langle D, I \rangle$ будем называть базовой моделью (англ. base model) для M.

Definition

Элементы множества $\{t, f, *\}$ будем называть истинностными означиваниями (англ. truth values).

Definition

X будем называть истинностным концептом (англ. truth-concept).

Функция приписывания

Definition

Определим функцию приписывания a (англ. a is an assignment) как функцию, которая отображает переменные языка L в носитель D. Пусть x и y суть переменные, и $d \in D$. Тогда

$$a(d/x)(y) = \begin{cases} a(y) & \text{если } y \neq x \\ d & \text{если } y = x \end{cases}$$

Функция приписывания

Definition

Определим функцию приписывания a (англ. a is an assignment) как функцию, которая отображает переменные языка L в носитель D. Пусть x и y суть переменные, и $d \in D$. Тогда

$$a(d/x)(y) = \begin{cases} a(y) & \text{если } y \neq x \\ d & \text{если } y = x \end{cases}$$

Имея модель M, функцию приписывания a, и терм t языка L, определим

$$(M, a)(t) = \begin{cases} I(t) & \text{если } t \text{ есть константа или цитирующее имя (англ. quotation-name)} \\ a(t) & \text{если } t \text{ есть переменная} \end{cases}$$

$(M, a)(t)$ есть обозначение для отношения терма t к модели M и функции приписывания a.

Схема означивания

Definition

Схемой означивания (англ. valuation scheme) для языка L есть функция V, которая, каждой тройке $\langle M, a, A\rangle$, где M — модель языка L, a — функция приписывания, и A — формула языка L, приписывает истинностное означивание.

Definition

Пусть задано множество M, функция приписывания a, и формула A. Положим:

$$V_{M,a}(A) = V(M, a, A)$$

Атомарно-нормальная схема означивания

Схема означивания V есть атомарно-нормальная (англ. atomic-normal), если и только если для каждой модели M и функции приписывания a:

1. Если t и s суть термы языка L, то

$$V_{M,a}(t = s) = \begin{cases} t & \text{если } (M,a)(t) = (M,a)(s) \\ f & \text{если } (M,a)(t) \neq (M,a)(s) \end{cases}$$

2. Если P есть n-арный предикатный символ, отличный от T, и $t_1, \ldots, t_n$ суть термы, то

$$V_{M,a}(Pt_1 \ldots t_n) = \begin{cases} t & \text{если } \langle (M,a)(t_1), \ldots, (M,a)(t_n) \rangle \in I(P) \\ f & \text{если } \langle (M,a)(t_1), \ldots, (M,a)(t_n) \rangle \notin I(P) \end{cases}$$

3. Если t есть терм, то

$$V_{M,a}(\mathrm{T}t) = X((M,a)(t))$$

Классическая схема означивания

Схема означивания V есть классическая (англ. classical) если и только если «классические входы выдают классические выходы» (англ. «classical inputs give classical outputs»), т.е., если A и B формулы языка L, то

1. Если $V_{M,a}(A) = t$ и $V_{M,a}(B) = t$, то $V_{M,a}(A \wedge B) = t$;
2. Если $V_{M,a}(A) = t$ и $V_{M,a}(B) = f$, то $V_{M,a}(A \wedge B) = f$;
3. ...
4. Если $V_{M,a(d/x)}(A) = t$ для всех $d \in D$, то $V_{M,a}(\forall x A) = t$;
5. Если $V_{M,a(d/x)}(A) = f$ для некоторого $d \in D$, и $V_{M,a(d/x)} \in \{t, f\}$ для всех $d \in D$, то $V_{M,a}(\forall x A) = f$;
6. и т.д.

Негативно-нормальная схема означивания

Схема означивания есть негативно-нормальная (англ. negation-normal), если и только если для любой формулы A

$$V_{M,a}(\neg A) = \begin{cases} t & \text{если } V_{M,a}(A) = f; \\ * & \text{если } V_{M,a}(A) = *; \\ f & \text{если } V_{M,a}(A) = t; \end{cases}$$

Ситуация для свободных переменных

Пусть V — произвольная схема означивания, M — произвольная модель, a — произвольная функция приписывания, и A — произвольная формула языка L.

Для дальнейшего мы можем потребовать: $V_{M,a}(A)$ не следует зависеть от значения оценки $a(x)$, где x — переменная, которая не свободна в A.

Ситуация для свободных переменных

Пусть V — произвольная схема означивания, M — произвольная модель, a — произвольная функция приписывания, и A — произвольная формула языка L.

Для дальнейшего мы можем потребовать: $V_{M,a}(A)$ не следует зависеть от значения оценки $a(x)$, где x — переменная, которая не свободна в A.

В частности, если A есть предложение языка L, то $V_{M,a}(A)$ следует быть независимой от выбора a. Т.е. мы можем положить

$$V_M(A) = V_{M,a}(A)$$

Идея порядка

Имеется естественный порядок на множестве $\{t, f, *\}$, который отражает идею, что t и f суть «определённые» (англ. «definite») истинностные означивания, а $*$ есть сорт «более низко ступенчатой» (англ. «lower grade») истинностного означивания (или отсутствия истинностного означивания):

$$* < t \quad \text{и} \quad * < f.$$

Данный порядок может быть расширен до порядка на истинностных концептах.

Definition

Пусть у нас есть два истинностных концепта X_1 и X_2 на одинаковой области определения D. $X_1 \leqslant X_2$ если и только если для каждого $d \in D$, $X_1(d) \leqslant X_2(d)$.

Definition

Пусть заданы произвольные две модели $M_1 = \langle D_1, I_1, X_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, I_2, X_2 \rangle$. Положим $M_1 \leqslant M_2$ если и только если $D_1 = D_2$, $I_1 = I_2$ и $X_1 \leqslant X_2$.

Монотонная схема означивания

Ключевая идея монотонной (англ. monotonic) схемой означивания:

V есть монотонная, если и только если выполнено $V_{M,a}(A) \leqslant V_{N,a}(A)$ для всех формул A языка L, как только $M \leqslant N$.

Монотонная схема означивания

Ключевая идея монотонной (англ. monotonic) схемой означивания:

V есть монотонная, если и только если выполнено $V_{M,a}(A) \leqslant V_{N,a}(A)$ для всех формул A языка L, как только $M \leqslant N$.

Для целей теории Крипке мы допустим, что все схемы означивания суть монотонные.

Монотонная схема означивания

Ключевая идея монотонной (англ. monotonic) схемой означивания:

V есть монотонная, если и только если выполнено $V_{M,a}(A) \leqslant V_{N,a}(A)$ для всех формул A языка L, как только $M \leqslant N$.

Для целей теории Крипке мы допустим, что все схемы означивания суть монотонные.

Крипке упоминает несколько монотонных схем означиваний; мы ограничим себя явным определением Сильной схемой по Клини (англ. Strong Kleene scheme).

Определение Сильной схемы по Клини для атомарных формул

Ниже предполагаем, что $M = \langle D, I, X \rangle$ — модель для языка L, и a — функция приписывания.

Сильная схема по Клини (SK):

1. Если t и s суть термы языка L, то
$$SK_{M,a}(t = s) = \begin{cases} t & \text{если } (M, a)(t) = (M, a)(s); \\ f & \text{если } (M, a)(t) \neq (M, a)(s). \end{cases}$$
2. Если P есть n-арный предикатный символ, отличный от T, и $t_1, \ldots, t_n$ суть термы, то
$$SK_{M,a}(Pt_1 \ldots t_n) = \begin{cases} t & \text{если } \langle (M, a)(t_1), \ldots, (M, a)(t_n) \rangle \in I(P); \\ f & \text{если } \langle (M, a)(t_1), \ldots, (M, a)(t_n) \rangle \notin I(P). \end{cases}$$
3. Если t есть терм, то
$$SK_{M,a}(\mathrm{T}t) = X((M, a)(t))$$

Определение Сильной схемы по Клини для формул

3. Если A и B суть формулы языка L, и x — переменная, то

3.1.

$$SK_{M,a}(\neg A) = \begin{cases} t & \text{если } SK_{M,a}(A) = f; \\ * & \text{если } SK_{M,a}(A) = *; \\ f & \text{если } SK_{M,a}(A) = t. \end{cases}$$

3.2.

$$SK_{M,a}(A \wedge B) = \begin{cases} t & \text{если } SK_{M,a}(A) = SK_{M,a}(B) = t; \\ f & \text{если } SK_{M,a}(A) = f \text{ или } SK_{M,a}(B) = f; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.3.

$$SK_{M,a}(A \vee B) = \begin{cases} t & \text{если } SK_{M,a}(A) = t \text{ или } SK_{M,a}(B) = t; \\ f & \text{если } SK_{M,a}(A) = SK_{M,a}(B) = f; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.4.

$$SK_{M,a}(A \supset B) = \begin{cases} t & \text{если } SK_{M,a}(A) = f \text{ или } SK_{M,a}(B) = t; \\ f & \text{если } SK_{M,a}(A) = t \text{ и } SK_{M,a}(B) = f; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.5.

$$SK_{M,a}(\forall x A) = \begin{cases} t & \text{если для всех } d \in D, SK_{M,a(d/x)} = t; \\ f & \text{если для некоторого } d \in D, SK_{M,a(d/x)} = f; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.6.

$$SK_{M,a}(\exists x A) = \begin{cases} t & \text{если для некоторого } d \in D, SK_{M,a(d/x)} = t; \\ f & \text{если для всех } d \in D, SK_{M,a(d/x)} = f; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Несколько замечаний

1. Можно показать, что для любой формулы A, и двух функций приписываний a и a', если $a(x) = a'(x)$ для всех переменных x, которые входят свободно в A, верно $SK_{M,a}(A) = SK_{M,a'}(A)$. В частности, если A есть замкнутая формула, то данное равенство выполнено для любых двух функций приписываний a и a'.

Несколько замечаний

1. Можно показать, что для любой формулы A, и двух функций приписываний a и a', если $a(x) = a'(x)$ для всех переменных x, которые входят свободно в A, верно $SK_{M,a}(A) = SK_{M,a'}(A)$. В частности, если A есть замкнутая формула, то данное равенство выполнено для любых двух функций приписываний a и a'.

   Итак, как мы писали выше, для любого предложения A и функции приписывания a, мы можем положить

$$SK_M(A) = SK_{M,a}(A).$$

Несколько замечаний

1. Можно показать, что для любой формулы A, и двух функций приписываний a и a', если $a(x) = a'(x)$ для всех переменных x, которые входят свободно в A, верно $SK_{M,a}(A) = SK_{M,a'}(A)$. В частности, если A есть замкнутая формула, то данное равенство выполнено для любых двух функций приписываний a и a'.

   Итак, как мы писали выше, для любого предложения A и функции приписывания a, мы можем положить

$$SK_M(A) = SK_{M,a}(A).$$

2. Также можно доказать, что SK есть монотонная схема означивания, пользуясь индукцией по A и тем, что SK есть классическая, атомарно-нормальная и негативно-нормальная.

Модели с неподвижной точкой относительно V

Пусть нам дана схема означивания V.

Definition

Модель $M = \langle D, I, X \rangle$ есть модель с неподвижной точкой относительно V (англ. fixed point model relative to V) если и только если для каждого предложения A языка L, $V_M(A) = X(A)$.

Модели с неподвижной точкой относительно V

Пусть нам дана схема означивания V.

Definition

Модель $M = \langle D, I, X \rangle$ есть модель с неподвижной точкой относительно V (англ. fixed point model relative to V) если и только если для каждого предложения A языка L, $V_M(A) = X(A)$.

Легко видеть, что модели с неподвижной точкой, это в точности те, которые отвечают нашему интуитивному требованию на неподвижную точку:

Для любого предложения A, A следует быть истинным всякий раз, когда истинно Т‘A’, и ложно всякий раз, когда ложно Т‘A’.

Будем считать, что схема означивания V есть атомарно-нормальная.

1. Первое, в общем, если у нас есть модель M с неподвижной точкой, то предложения A и T'A' обязаны иметь одинаковые истинностные означивания. Подробнее:

$$\begin{aligned} V_{M,a}(\mathrm{T}`A') &= X((M,a)(`A')) && (\text{т.к. } V \text{ есть атомарно-нормальная}) \\ &= X(A) && (\text{т.к. } I(`A') = A) \\ &= V_{M,a}(A) && (\text{по предположению}). \end{aligned}$$

Будем считать, что схема означивания V есть атомарно-нормальная.

1. Первое, в общем, если у нас есть модель M с неподвижной точкой, то предложения A и Т'A' обязаны иметь одинаковые истинностные означивания. Подробнее:

$$\begin{aligned} V_{M,a}(\text{Т‘}A\text{’}) &= X((M,a)(\text{‘}A\text{’})) && (\text{т.к. } V \text{ есть атомарно-нормальная}) \\ &= X(A) && (\text{т.к. } I(\text{‘}A\text{’}) = A) \\ &= V_{M,a}(A) && (\text{по предположению}). \end{aligned}$$

2. Наоборот, предположим, что M есть модель, в которой A и Т'A' имеют одинаковые означивания. Тогда M будет моделью с неподвижной точкой. Подробнее:

$$\begin{aligned} V_{M,a}(A) &= V_{M,a}(\text{Т‘}A\text{’}) && (\text{по предположению}) \\ &= X((M,a)(\text{‘}A\text{’})) && (\text{т.к. } V \text{ есть атомарно-нормальная}) \\ &= X(A) && (\text{т.к. } I(\text{‘}A\text{’}) = A). \end{aligned}$$

Будем считать, что схема означивания V есть атомарно-нормальная.

1. Первое, в общем, если у нас есть модель M с неподвижной точкой, то предложения A и T‘A’ обязаны иметь одинаковые истинностные означивания. Подробнее:

$$\begin{aligned} V_{M,a}(\mathrm{T}`A\text{'}) &= X((M,a)(`A\text{'})) && \text{(т.к. } V \text{ есть атомарно-нормальная)} \\ &= X(A) && \text{(т.к. } I(`A\text{'}) = A) \\ &= V_{M,a}(A) && \text{(по предположению).} \end{aligned}$$

2. Наоборот, предположим, что M есть модель, в которой A и T‘A’ имеют одинаковые означивания. Тогда M будет моделью с неподвижной точкой. Подробнее:

$$\begin{aligned} V_{M,a}(A) &= V_{M,a}(\mathrm{T}`A\text{'}) && \text{(по предположению)} \\ &= X((M,a)(`A\text{'})) && \text{(т.к. } V \text{ есть атомарно-нормальная)} \\ &= X(A) && \text{(т.к. } I(`A\text{'}) = A). \end{aligned}$$

Итак, модели с неподвижной точкой отражают интуитивную идею, что мы можем утвердить (или отклонить) предложение, которое истинно именно при таких обстоятельствах, когда мы утверждаем (или отклоняем) то предложение.

Теорема о минимальной Неподвижной Точки

Theorem (Минимальная Неподвижная Точка)

Пусть нам дана произвольная базовая модель $\langle D, I \rangle$ и монотонная схема означивания V. Тогда имеется истинностный концепт X такой, что $M = \langle D, I, X \rangle$ есть неподвижная точка относительно V.

Доказательство.

Теорема о минимальной Неподвижной Точки

Theorem (Минимальная Неподвижная Точка)

Пусть нам дана произвольная базовая модель $\langle D, I\rangle$ и монотонная схема означивания V. Тогда имеется истинностный концепт X такой, что $M = \langle D, I, X\rangle$ есть неподвижная точка относительно V.

Доказательство.

Будем вести индукция по ординалам. Определим последовательность истинностных концептов X_α, где α ординал:

$$X_0(d) \quad = \quad * \text{ для всех } d \in D.$$

Теорема о минимальной Неподвижной Точки

Theorem (Минимальная Неподвижная Точка)

Пусть нам дана произвольная базовая модель $\langle D, I \rangle$ и монотонная схема означивания V. Тогда имеется истинностный концепт X такой, что $M = \langle D, I, X \rangle$ есть неподвижная точка относительно V.

Доказательство.

Будем вести индукция по ординалам. Определим последовательность истинностных концептов X_α, где α ординал:

$$X_0(d) = * \text{ для всех } d \in D.$$

$$X_{\alpha+1}(d) = \begin{cases} V_{\langle D,I,X_\alpha \rangle}(d) & \text{если } d \text{ есть предложение языка } L; \\ * & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$\square$

Доказательство.

Когда λ есть предельный ординал,

$$X_\lambda(d) = \begin{cases} t & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = t \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ f & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = f \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство.

Когда λ есть предельный ординал,

$$X_\lambda(d) = \begin{cases} t & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = t \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ f & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = f \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как показывает Крипке, мы можем использовать монотонность V чтобы показать, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $X_\alpha \leqslant X_\beta$. Это следует из основ теории множеств, т.к. коллекция истинностных концептов над $\langle D, I \rangle$ есть множество, а ординалы нет, как итог, имеем ординал σ, такой, что $X_\sigma = X_{\sigma+1}$.

Доказательство.

Когда λ есть предельный ординал,

$$X_\lambda(d) = \begin{cases} t & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = t \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ f & \text{если имеем ординал } \alpha < \lambda \text{ такой, что } X_\beta(d) = f \text{ для всех } \beta \text{ между } \alpha \text{ и } \lambda; \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как показывает Крипке, мы можем использовать монотонность V чтобы показать, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $X_\alpha \leqslant X_\beta$. Это следует из основ теории множеств, т.к. коллекция истинностных концептов над $\langle D, I \rangle$ есть множество, а ординалы нет, как итог, имеем ординал σ, такой, что $X_\sigma = X_{\sigma+1}$.

Наконец, для всех предложений A языка L, $X_{\sigma+1}(A) = V_{\langle D,I,X_\sigma \rangle}(A) = X_\sigma(A)$. Итак, $\langle D, I, X_\sigma \rangle$ есть неподвижная точка.

$\square$

Замечание

Данное доказательство может быть рассмотрено со следующей стороны: мы строим иерархию моделей (или интерпретируемые языки), $M_0, M_1, M_2, \ldots$. До некоторого ординала σ эта иерархия строго возрастает; на σ она стабилизируется и $M_\beta = M_\sigma$ для всех $\beta \geqslant \sigma$.

Замечание

Данное доказательство может быть рассмотрено со следующей стороны: мы строим иерархию моделей (или интерпретируемые языки), $M_0, M_1, M_2, \ldots$. До некоторого ординала σ эта иерархия строго возрастает; на σ она стабилизируется и $M_\beta = M_\sigma$ для всех $\beta \geqslant \sigma$.

Неподвижная точка, $M = \langle D, I, X_\sigma \rangle$, которую мы таким образом получили, есть фактически *минимальная* относительно базовой модели $\langle D, I \rangle$; итак, если $\langle D, I, X \rangle$ есть модель с неподвижной точкой, то $X_\sigma \leqslant X$.

Замечание

Данное доказательство может быть рассмотрено со следующей стороны: мы строим иерархию моделей (или интерпретируемые языки), $M_0, M_1, M_2, \ldots$. До некоторого ординала σ эта иерархия строго возрастает; на σ она стабилизируется и $M_\beta = M_\sigma$ для всех $\beta \geqslant \sigma$.

Неподвижная точка, $M = \langle D, I, X_\sigma \rangle$, которую мы таким образом получили, есть фактически *минимальная* относительно базовой модели $\langle D, I \rangle$; итак, если $\langle D, I, X \rangle$ есть модель с неподвижной точкой, то $X_\sigma \leqslant X$.

Доказательство.

Пусть $\langle D, I, X \rangle$ будет моделью с неподвижной точкой, и пусть ординальная последовательность X_α будет определяться как в доказательстве выше. Индукцией по α мы можем доказать, что $X \geqslant X_\alpha$ для всех ординалов α.

$\square$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kremer M. Kripke and the logic of truth //Journal of Philosophical Logic. – 1988. – С. 225-278.
2. Fitting M. Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth //Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1986. – Т. 27. – №. 1. – С. 75-88.
3. Формальная философия-71: доклад Станислава Сперанского "О теории истины по Крипке"(часть 1),
URL: https://www.youtube.com/watch?v=gdjxRU299aM