

Одно измерение. μ — сепарабельное Банахово пространство, $F: \mu \rightarrow \mu$ — лине. непрерывное отображение.

$$(1) \quad u(n+1) = F(u(n)) + \xi_n, \quad n \geq 0, \\ u(0) = u_0$$

$\{u(n; u_0)\}$ — траектория (1).

Переходная вероятность

$$\Sigma_n(v) \in \mathcal{P}(\mu), \quad \Sigma_n(v) = \mathcal{D}(u(n; v))$$

Лемма. Пусть $Q \in \mathcal{B}(\mu)$. Тогда

$$n \ni v \longrightarrow \Sigma_n(v)(Q) =: f_n(v)$$

измерима $\forall n$.

Док. Пусть сначала $n=1$. Тогда

$$f_1(v) = \int \chi_Q(F(v) + \xi) \mu(d\xi).$$

Рассмотрим (повыше) пространство $\tilde{\mu}$

$\tilde{\mu} = \mu \times \nu$, $\nu = \delta_0$, $\tilde{\mu}$ рассмотрим и на ν меру μ . За $\tilde{\mu}$ рассмотрим измеримую функцию

$$G(v, \xi) = \chi_Q(F(v) + \xi).$$

Она непрерывна и оугмлена.

Первая часть теоремы Бурбаки (напр., см. W. Rudin, "Real and Complex Analysis"), утверждает, что для

модель Бюргера, мера ν на M ,
функция

$$\int G(v, z) \gamma(dz)$$

измерима (и ограничена и непрерывна).
Это базисное утверждение.

Если $n \geq 3$, то рассмотрим

$$f_2(v) = \int \gamma_R (F[F(v + z_1)] + z_2) \mu(dz_1, dz_2).$$

Возьмем пространство $\tilde{M} = M \times M$, $N = M \times M$,
пусть это пространство f_2 измерима по Гильберту.
Этот и все далее.

Экзотичность

Пусть в (1) $M = \mathbb{R}^n$,
вспомогательные F лев.

линейные и $\forall u$
 $|F(u)| \leq d|u| + C$, $d < 1$.

Кроме того, пусть

$$|\xi_n^w| \leq C_1 \quad \forall w$$

$$D(\xi_n) = \int P(x) dx, \quad \text{supp } P \subset \{x : |x| \leq C_2\},$$

функция P линейна и $P(0) \neq 0$. Тогда

а) найдется $C_2 > 0$, что для $\bar{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$
 $\leq C_2$ и вогнутости для (1);

б) система (1) неустойчива:

Найдётся мера $\mu \in \mathcal{P}(\bar{B}_R)$, что

1) $\forall x_0 \in \bar{B}_R$,

(2) $\| \mathcal{D} u(n; x_0) - \mu \|_L^2 \leq C_3 e^{-\alpha n}$,
 $C_3, \alpha > 0$;

3) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} u(n; x_0) \rightarrow \mu$.

Ссылка: [SK], Randomly forced nonlinear PDEs and... (EMC, 2006),

Раздел 8.

Пусть $u^{s\pm}(n)$ — (слабо) стат. решение
 (1), $\mathcal{D} u^{s\pm}(n) = \mu \quad \forall n \geq 0$.

Пусть $\xi = \xi_n, n \in \mathbb{Z}$ — незав. с.в., рас-
 пределяемые как ξ_1 .

Лемма 1. $\exists$ стат. процесс $\{v(j), j \in \mathbb{Z}\}$,
 такой что $\mathcal{D}(v(j)) = \mu$, и что v —
 слабое решение (1) при $j \in \mathbb{Z}$.

Задача 1. Показать доказательство
 леммы, используя ссылки в [SK], Разд. 8.

Пусть
 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}} = \{x_j \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{Z}\}$.

Введем в $\mathcal{R}$ расстояние:

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \cdot 2^{-|j|}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ — метрическое пространство.

Для $\epsilon \in \mathbb{Z}$ положим

$$T_\epsilon : A \rightarrow A, \quad (\dots, u_0, u_1, \dots) \mapsto (\dots, u'_0, u'_1, \dots),$$

где $u'_j = u_j + \epsilon$.

Обозначим $P = D(\nu(\cdot)) \in \mathcal{P}(A)$.

Конечно, $T_\epsilon \circ P = P \quad \forall \epsilon$.

Утверждение: 1) множество $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

инвариантно для (1), если

$$(*) \quad \sum_i \mu_i(x, A) = 1 \quad \text{для } \mu - \text{н.в. } x \in \mathbb{R}^n$$

2) множество $\tilde{A} \in \mathcal{B}(A)$ инвариантно для $\xi \in T_\epsilon$, если $P(\tilde{A} \Delta T_\epsilon(\tilde{A})) = 0$

где Δ — симметрическая разность множеств.

Очевидно, что если A инвар. для (1), то $A^{\mathbb{Z}}$ инвар. для $\xi \in T_\epsilon$.

Лемма 2. Если $\tilde{A}$ — инвар. для $\xi \in T_\epsilon$, то $P(\tilde{A} \Delta A^{\mathbb{Z}}) = 0$.

Задача 2. — как задача 1, но про $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1. Преобразование

$T_1 : A \rightarrow A$ эргодично.

Док. Пусть $\tilde{A}$ инвар. для T_1 , и A — соотв. инвар. множество для (1) из леммы 2. Пусть $\mu(A) \neq 0$.

Тогда в буге (*) условием мера

$$\mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$$

мера слагающаяся. $\mu(A) = 1$.

Значит, по формуле меры меры,

$\mu(A)$ равно 0 или 1.

Так как $P = D(U(-))$ и $\tilde{A} = A$, $\mathbb{Z}$

то имеем $P(\tilde{A}) = 0$ или 1. $\square$

Пусть $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$. $\mathbb{R}^3$

Теорема и YBZ ,

$$(3) \quad \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} f(U(j)) \rightarrow \langle f, \mu \rangle, \text{ н.в.}$$

Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Для произвольного, пусть $x_0 \in \mathbb{B}_R$. Докажем

$$D(u(n; x_0)) = \mu_n, n=0, 1, \dots \quad \text{Заметим, что}$$

$$D(U(j)) = \mu \quad \forall j$$

и это по (2)

$$(4) \quad \| \mu_n - \mu \|_L^q \leq C e^{-\alpha n}$$

Предположение: Существует
слабое решение $\tilde{u}(n; x_0)$ и слабое
станд. решение $\tilde{v}(n)$, что

$$(5) \quad \mathbb{E} \left| \tilde{u}(n) - \hat{u}(n) \right| \leq C \| \mu_0 - \mu \|_1^{1/2} \leq C e^{-\alpha j}. \quad (4)$$

Это следует из доказательства (2) по методу канонизации, который
создает еще раз новую пару
слабых решений. См. предыдущий
текст, лемма [SK], Следствие 6.3.

Лемма 3:

$$(*) \quad \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \varphi(u(n; x_0)) \longrightarrow \langle \varphi, \mu \rangle \quad \text{н.н.}$$

тогда и только тогда, когда (*)
выполнено для любого слабого
решения (1).

Задача 3. Кемто доказана (*)

В силу (5) и леммы 6а,

$$(6) \quad P \left(\underbrace{|\tilde{u}(n) - \tilde{v}(n)|}_{Q_j} \geq e^{-\frac{1}{2}x_j} \right) \leq C e^{-\frac{1}{2}x_j}.$$

Q_j — событие в Ω .

Из леммы Дорна - Каттелана и (6) следует существование с. в.

$$T' : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad P(T' = \infty) = 0,$$

что

$$(7) \quad |\tilde{z}_j - x_j| \leq e^{-\frac{1}{2}x_j} \quad \forall j \geq T'(\omega).$$

В силу (3) и (*),

$$(8) \quad \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(\tilde{v}(n)) \longrightarrow \langle f, \mu \rangle.$$

Можно считать, что $f \in C(B_R)$.

Значит, f равномерно непрерывна.
 Для простоты, пусть
 $\text{Lip } f \leq C_x$.

Тогда в силу (7)

$$(9) \quad |f(\tilde{v}(n)) - f(\tilde{u}(n))| \leq C_x e^{-\frac{1}{2}x_j} \quad \text{при } j \geq T'(\omega).$$

Из (9) и (8) следует, что

$$\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(\tilde{u}(n)) \longrightarrow \langle f, \mu \rangle.$$

Теперь из (*) получаем 3352:

Lemma 2. Если $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, то
 $\forall x_0,$

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} f(\mu(j; x_0)) \longrightarrow \langle f, \mu \rangle, \text{ n.h.}$$