Модели представлений $\mathfrak{gl}_n$, связанные с системами уравнений гипергеометрического типа

Д. В. Артамонов[1]

[1]МГУ им. Ломоносова

Модели представлений

Definition (И. М. Гельфанд, А.В. Зелевинский, 1984)

Модель представлений $\mathfrak{gl}_n$ - это прямая сумма всех конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{gl}_n$, взятых с кратностью 1.

Модель представлений с $m_n = 0$ имеет вид

$$Mod = \bigoplus_{[m_1,\dots,m_{n-1},0]} V^{[m_1,\dots,m_{n-1},0]}$$

Модель Вейля

Пусть V_0 - стандартное представление $\mathfrak{gl}_n$.

Представлением старшего веса $[m_1, ..., m_{n-1}, 0]$ реализуется как подпредставление в $(V_0^{\wedge 1})^{Sym(m_1 - m_2)} \otimes ... \otimes (V_0^{\wedge n-1})^{Sym\, m_{n-1}}$. Введём обозначение

$$a_{i_1,...,i_k} := e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} \subset V_0^{\wedge k}$$

В модели есть базис, кодируемый полустандартными таблицами Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline i & j \\ \hline k & \\ \cline{1-1}\end{array} \mapsto \quad Sym_{i,j}(a_{i,k} \otimes a_j) \in V_0^{\wedge 2} \otimes V_0^{\wedge 1}$$

Модель Желобенко

Рассматриваем функции на группе GL_n.

$$(Gf)(g) := f(gG), \quad g, G \in GL_n, \quad f(g) \in Fun(GL_n)$$

Примеры функций:

1. $a_i^j \in Fun(GL_n)$ - матричный элемент (i - столбец, j - строка)
2. $a_{i_1,\dots,i_k} := det(a_i^j)_{i=i_1,\dots,i_k}^{j=1,\dots,k}$

Тогда

$$E_{p,q} a_{i_1,\dots,i_k} = a_{i_1,\dots,i_k|_{q\mapsto p}}$$

В частности функция

$$a_1^{m_1-m_2} a_{1,2}^{m_2-m_3} \dots a_{1,2,\dots,n-1}^{m_{n-1}}$$

есть старший вектор веса $[m_1, \dots, m_{n-1}, 0]$.

Модель Желобенко

Теорема (Желобенко)

Полиномы от определителей $a_{i_1,\dots,i_k}$ - модель представлений $\mathfrak{gl}_n$.
Представление старшего веса $[m_1,\dots,m_{n-1},0]$ составляют те полиномы, для которых сумма степеней определителей порядка i равна $m_i - m_{i+1}$.

Важное замечание: между определителями a_X, $X \subset \{1,\dots,n\}$ много соотношений. Например:

$$a_1 a_{2,3} - a_2 a_{1,3} + a_3 a_{1,2} = 0$$

Важное наблюдение

Наблюдение

1. Во всех примерах модель составляют полиномы от a_X, $X \subset \{1, ..., n\}$.
2. Старший вектор записывается как
$$a_1^{m_1-m_2} a_{1,2}^{m_2-m_3} \dots a_{1,2,\dots,n-1}^{m_{n-1}}$$
3. Чем больше соотношений между a_X тем проще описывается пространство полиномов, входящих в модель
4. Чем меньше соотношений, тем проще проводить разные вычисления (действия генераторов, разложение тензорных произведений)

А-ГКЗ реализация

A_X, $X \subset \{1, ..., n\}$ - антисимметричные по X независимые переменные. Определяем действие

$$E_{p,q} A_{i_1,\dots,i_k} = A_{i_1,\dots,i_k|_{q \mapsto p}}$$

Вектор

$$A_1^{m_1-m_2} A_{1,2}^{m_2-m_3} \dots A_{1,2,\dots,n-1}^{m_{n-1}}$$

старший с весом $[m_1, ..., m_{n-1}, 0]$.
Тогда $V^{[m_1,\dots,m_{n-1},0]} \subset \mathbb{C}[A]$

Definition

Получающаяся модель $Mod = \bigoplus V^{[m_1,\dots,m_{n-1},0]}$ называется А-ГКЗ реализацией

А-ГКЗ' система

Из каких полиномов состоит $V^{[m_1,\dots,m_{n-1},0]} \subset \mathbb{C}[A]$?

Определители a_X удовлетворяют соотношениям Плюккера. Пусть $I \subset \mathbb{C}[A]$ - идеал, порождённый этими соотношениями.

Соотношение Плюккера

$$\sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(i_1,\dots,i_p} a_{j_1,\dots,j_q)} = 0$$

Например

$$a_{i,Y} a_{j,y,Y} - a_{j,Y} a_{i,y,Y} + a_{y,Y} a_{i,j,Y} = 0$$

Теорема

Идеал I порождён соотношениями Плюккера.

Сделаем замену

$$A_X \mapsto \frac{d}{dA_X},$$

получим идеал

$$\bar{I} \subset Diff_{const} \mapsto \text{ Система УрЧП.}$$

Definition

Получающаяся система УрЧП называется системой А-ГКЗ'

Теорема

Пространство полиномиальных решений системы А-ГКЗ' есть модель представлений, представление старшего веса $[m_1, ..., m_{n-1}, 0]$ есть пространство полиномов, таких что сумма степеней $A_X, |X| = i$ есть $m_i - m_{i+1}$

Выберем некоторые 3-х членные соотношения

$$a_{i,Y}a_{j,y,Y} - a_{j,Y}a_{i,y,Y} + a_{y,Y}a_{i,j,Y} = 0,$$
$$i < j < y$$

С ним свяжем вектора

$$v_\alpha := e_{i,Y} + e_{j,y,Y} - e_{j,Y} - e_{i,y,Y},$$
$$r_\alpha := e_{y,Y} + e_{i,j,Y} - e_{j,Y} - e_{i,y,Y}$$

A-ГКЗ система

Система A-ГКЗ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial A_{i,Y}\partial A_{j,y,Y}}-\frac{\partial^2}{\partial A_{j,Y}\partial A_{i,y,Y}}+\frac{\partial^2}{\partial A_{y,Y}\partial A_{i,j,Y}}\right)F=0$$

Теорема

Системы A-ГКЗ' и A-ГКЗ имеют одно и то же пространство полиномиальных решений.

Следствие

A-ГКЗ модель есть пространство решений системы A-ГКЗ

Система ГКЗ

Система А-ГКЗ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial A_{i,Y}\partial A_{j,y,Y}} - \frac{\partial^2}{\partial A_{j,Y}\partial A_{i,y,Y}}\right)\mathcal{F} = 0 \qquad (1)$$

Система ГКЗ, построенная по решетке $\mathcal{B}$: $b \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow$
$b = b^+ - b^-, b^\pm \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0} \quad \Rightarrow$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{b_+} - \left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^{b_-}\right)\mathcal{F} = 0$$

Предлоджение

Система (1) есть система ГКЗ, построенная по решётке $\mathcal{B} = \mathbb{Z} < v_\alpha >$

Решения систем ГКЗ и А-ГКЗ

Решениями ГКЗ являются Γ-ряды

$$\mathcal{F}_\delta(A) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^{\mathcal{K}}} \frac{A^{\delta+tv}}{(\delta+tv)!} = \sum_{x \in \delta+\mathcal{B}} \frac{A^x}{x!}, \quad \delta \in \mathbb{Z}^N$$

Для $s \in \mathbb{Z}^{\mathcal{K}}_{\geq 0}$ положим

$$J^s_\delta(z) := \sum_{t \in \mathbb{Z}^{\mathcal{K}}} \frac{z^{\delta+tv}(s+1)...(s+k-1)}{(\delta+tv)!}$$

Решениями А-ГКЗ являются Γ-ряды

$$F_\delta = \sum_{s \in \mathbb{Z}^{\mathcal{K}}_{\geq 0}} \frac{(-1)^s}{s!} J^s_{\delta-sr}(z).$$

Какие надо отобрать δ, чтобы

1. $\mathcal{F}_\delta(A)$ были базисом в пространстве решений системы ГКЗ?
2. $F_\delta(A)$ были базисом в пространстве решений системы А-ГКЗ?

Простой ответ:

Lemma

Нужно взять максимальный набор векторов $\{\delta\}$, такой что

1. Классы эквивалентности $\Pi = \delta + \mathcal{B}$ различны
2. Хотя бы один вектор в классе имеет только неотрицательные координаты

Диаграма Гельфанда-Цетлина для $\mathfrak{gl}_3$

$V_{[m_1,m_2,0]}$ - представление $\mathfrak{gl}_3$ старшего веса $[m_1, m_2, 0]$,

$$\mathfrak{gl}_3 \downarrow \mathfrak{gl}_2 \;\Rightarrow\; V_{[m_1,m_2,0]} = \bigoplus V_{[k_1,k_2]}$$

$$\mathfrak{gl}_2 \downarrow \mathfrak{gl}_1 \;\Rightarrow\; V_{[k_1,k_2]} = \bigoplus V_{h_1}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & k_1 & & k_2 & \\ & & h_1 & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

Пусть функция

$$\mathcal{F} = \sum_X c_X a_X^{r_X}$$

соответствует диаграмме Гельфанда-Цетлина. Какие у нее могут быть показатели? Наивный ответ

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_{1,2} + r_{1,3} + r_{2,3} = m_1, \\ r_{1,2} + r_{1,3} + r_{2,3} = m_2 \\ r_1 + r_2 + r_{1,2} + r_{1,3} + r_{2,3} = k_1, \\ r_{1,2} = k_2, \\ r_1 + r_{1,2} + r_{1,3} = h_1 \end{cases}$$

Сдвинутая решетка

$$\gamma + B \subset \mathbb{Z}^{2^3-1}$$

Оказывается, что $B = \mathcal{B} = \mathbb{Z} < e_1 - e_2 - e_{1,3} + e_{2,3} >$ для $n = 3$!!!

На самом деле в случае $\mathfrak{gl}_3$ эта верный ответ:

$$\mathcal{F}(a)=\sum_{x\in\gamma+\mathcal{B}}\frac{a^x}{x!}$$

соответствует диаграмме Гельфанда-Цетлина.
Рассмотрим подрешетку в $\mathbb{Z}^{2^n-2}$, определяемую системой уравнений вид

$$v\in B\Leftrightarrow\sum_{X:X \text{ имеет } p \text{ элементов } \leq q} r_X=0$$

Lemma

Это есть $B=\mathcal{B}=\mathbb{Z}<v_\alpha>$.

$$B \Leftrightarrow \sum_{X : X \text{ имеет } p \text{ элементов } \leq q} r_X = m_{p,q} \leftrightarrow \delta + \mathcal{B} \qquad (3)$$

Различные $mod\mathcal{B}$ вектора $\delta \leftrightarrow$ правые части $(m_{p,q})$

Теорема

$\Pi = \delta + \mathcal{B}$ имеет хотя бы один вектор с неотрицательными координатами $\Leftrightarrow$ $(m_{p,q})$ - диаграмма Гельфанда-Цетлина

Следствие

Если по всевозможным диаграммам Гельфанда-Цетлина $(m_{p,q})$ согласно (3) построить сдвинутые решетки $\delta + \mathcal{B}$, а по ним - базисные решения А-ГКЗ $F_\delta(A)$ то получится базис А-ГКЗ модели

Следствие

Если по всевозможным диаграммам Гельфанда-Цетлина $(m_{p,q})$ согласно (3) построить сдвинутые решетки $\delta + \mathcal{B}$, а по ним - базисные решения ГКЗ $\mathcal{F}_\delta(a)$ то получится базис модели Желобенко

Теорема

$< \mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A) >:= \mathcal{F}(\frac{d}{dA})\mathcal{G}(A) \mid_{A_X=0}$ есть инвариантное скалярное произведение в А-ГКЗ реализации

Введем порядок

$$\delta \prec \gamma \Leftrightarrow \delta = \gamma + sr \;\; modB, \quad s \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$$

В этом случае

$$[m_{1,k}, ..., m_{k,k}] + [0, ..., -1, ..., 1, ..., 0] = [m'_{1,k}, ..., m'_{k,k}]$$

Теорема

Ортогонализация базиса $\mathcal{F}_\delta(A)$ относительно этого порядка (в меньшую сторону) есть базис Гельфанда-Цетлина $G_\delta(A)$

Связь с базисом Гельфанда-Цетлина

Теорема

$$\mathcal{F}_\delta(A) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}} S^l_\delta \cdot \mathcal{G}_{\delta - lr}(A), \quad \mathcal{G}_\delta(A) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}} S^l_\delta \cdot \mathcal{F}_{\delta - lr}(A),$$

$$S^0_\delta = \frac{1}{C^0_\delta}, \quad S^l_\delta = -\frac{C^l_\delta}{C^0_\delta C^0_{\delta - lr}}, \ l \neq 0.$$

$$C^l_\delta = \sum_{u\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}, t\in\mathbb{Z}^k} \frac{(-1)^l (t+1)\ldots(t+u+l)(t+1)\ldots(t+u)}{(\delta - (l+u)r + tv)!(u+l)!u!}.$$

$$\mathfrak{sp}_{2n} =< F_{i,j} = E_{i,j} - sign(i)sing(j) \cdot E_{-j,-i} >, \qquad i,j \in \{-n, ... -1, 1, ..., n\},$$

$$\mathfrak{o}_{2n} =< F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i} >, \qquad i,j \in \{-n, ... -1, 1, ..., n\},$$
$$\mathfrak{o}_{2n+1} =< F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i} >, \qquad i,j \in \{-n, ... -1, 0, 1, ..., n\}.$$

Далее ограничиваемся представлениями

$$\mathfrak{sp}_{2n} : \qquad [m_{-n}, ..., m_{-1}], \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$
$$\mathfrak{o}_{2n+1}, \mathfrak{o}_{2n} : [m_{-n}, ..., m_{-1}], \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Соотношения между определителями

Группы Sp_{2n}, SO_{2n}, SO_{2n+1} определяются условиями

$$X^t\Omega X = \Omega \Leftrightarrow X^{-1} = \Omega^{-1}X^t\Omega$$

Есть соотношения Якоби

$$a_X = \pm a_{\widehat{-X}}.$$

Здесь $\pm = s \cdot (-1)^{i_1+\dots+i_k}(-1)^{\frac{(-2n+k-1)k}{2}}$, где $s = 1$ для серий B, D и s есть -1 в степени количество столбцов и строк с отрицательными индексами для серии C.

Например, для $\mathfrak{sp}_4$:

$$X = \{-1, 1\} \Rightarrow -X = \{1, -1\} \Rightarrow \widehat{-X} = \{-2, 2\}$$
$$a_{-1,1} = -a_{-2,2}$$

Теорема

В случае групп Sp_{2n}, SO_{2n}, SO_{2n+1} идеал соотношений между определителями порождается соотношениями типа Плюккера и Якоби

А-ГКЗ' система

Определители a_X удовлетворяют соотношениям Плюккера. Пусть $I \subset \mathbb{C}[A]$ - идеал, порожденный этими соотношениями.

Сделаем замену

$$A_X \mapsto \frac{\partial}{\partial A_X},$$

получим идеал

$$\bar{I} \subset Diff_{const} \mapsto \text{ Система УрЧП.}$$

Definition

Получающаяся система УрЧП называется системой А-ГКЗ'

А-ГКЗ модель

Теорема

Пространство полиномиальных решений системы А-ГКЗ' есть модель представлений, представление старшего веса $[m_{-n}, m_{-n+1} \dots]$ есть пространство полиномов, таких что сумма степеней $A_X, |X| = i$ есть $m_i - m_{i+1}$

Решетка $\mathcal{B}$

Введём порядок на индексах

$$1 \succ -1 \succ 2 \succ -2 \succ ... \succ 0. \tag{4}$$

Решётка $\mathcal{B} = \mathbb{Z} < v_\alpha >$:

$$v_\alpha = e_{i,Y} - e_{j,Y} - e_{i,y,Y} + e_{j,y,Y}, \text{ где } i \prec j \prec y$$

с вектором связно соотношение:

$$a_{i,Y}a_{j,y,Y} - a_{j,Y}a_{i,y,Y} + a_{y,Y}a_{i,j,Y} = 0$$

Система А-ГКЗ

Definition

Системой А-ГКЗ для тензорных представлений назовём систему

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{O}}_{\alpha} F = \left(\frac{\partial^2}{\partial A_{i,Y}\partial A_{j,y,Y}} - \frac{\partial^2}{\partial A_{j,Y}\partial A_{i,y,Y}} + \frac{\partial^2}{\partial A_{y,Y}\partial A_{i,j,Y}}\right)F = 0, \\ \text{для всех серий.} \\ \left(\frac{\partial}{\partial A_X} - \pm\frac{\partial}{\partial A_{\widehat{-X}}}\right)F = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Теорема

Системы А-ГКЗ и А-ГКЗ' имеют одно и то же пространство полиномиальных решений.

Решения пишутся так

$$h_\kappa = e_X - e_{\widehat{-X}}, \quad \kappa = 1, \dots, T,$$
$$f_\delta(A) := \sum_{t_1 \in \mathbb{Z}^K} \left(\prod_\kappa (\pm_\kappa 1)^{t_1^\kappa} \right) \cdot F_{\delta + t_1 h}(A)$$

Lemma

Чтобы получить базис нужно взять максимальный набор векторов $\{\delta\}$, такой что

1. Классы эквивалентности $\Pi = \delta + < \mathcal{B}, h_\kappa >$ различны
2. Хотя бы один вектор в классе имеет только неотрицательные координаты

Введем порядок

$$\delta \prec \gamma \Leftrightarrow \delta = \gamma + sr \ \ mod < \mathcal{B}, h_\kappa >, \quad s \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$$

Теорема

Ортогонализация базиса $\mathcal{F}_\delta(A)$ относительно этого порядка (в меньшую сторону) есть базис Гельфанда-Цетлина $G_\delta(A)$

1. A functional realization of the Gelfand-Tsetlin base. Принято к публикации в Известиях РАН, arXiv:2210.12680
2. Models of representations for classical series of Lie algebras, arXiv:2303.14757