Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 13. Пример вычисления первых кумулянтов. Коррелированный проектор

Теретёнков Александр Евгеньевич

2 мая 2023 г.

В прошлый раз...

1. Пишем строчку $\mathcal{P}\mathcal{L}\ldots\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. На её основе пишем все возможные строчки, вставляя операторы $\mathcal{P}$ так, чтобы получившая строчка содержала хотя бы один символ $\mathcal{L}$ между двумя операторами $\mathcal{P}$ и ставим знак $(-1)^{\#\mathcal{P}}$, где $\#\mathcal{P}$ — количество вставленных операторов $\mathcal{P}$.
3. Добавляем к первому символу $\mathcal{L}$ индекс t, а к остальным индексы t так, чтобы между любой парой супероператоров $\mathcal{P}$ индексы t_k были упорядочены по возростанию индекса k. Если таких способов несколько, то выписываем все возможные способы, сохраняя знак, получившийся на предыдущем шаге.
4. Складываем получившиеся члены с учётом знаков.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1})$ - ?

1. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
3. $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$
4. $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3})$ - ?

1. $\mathcal{PLLLLP}$.
2. $\mathcal{PLLLLP}$, $-\mathcal{PLPLLLP}$, $-\mathcal{PLLPLLP}$, $-\mathcal{PLLLPLP}$,$\mathcal{PLLPLPLP}$,$\mathcal{PLPLLPLP}$,$\mathcal{PLPLPLLP}$, $-\mathcal{PLPLPLPLP}$.
3. $-\mathcal{PLLPLLP} \to$ $-\mathcal{PL}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{PL}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{PL}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{PL}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{PL}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{PL}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}$
4.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$
\begin{gathered}
\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}) = \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}
\end{gathered}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Несколько более компактный вид (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$\mathcal{K}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_2(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_3(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (&\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\ &+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Аналогично (Chang, Skinner, 1993)

$$\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_3(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (&\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} + \\ &+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})\end{aligned}$$

Пример

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- \otimes I + \int \left(g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k \sigma_+ \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t) = \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \sigma_+ \otimes b_k \right) dk$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t), \rho]$$

$$\mathcal{P}\rho = \operatorname{Tr}_B \rho \otimes |vac\rangle\langle vac|$$

Пример

Утверждение.

$$\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\sigma_+\otimes\rho_B = -G_I(t-t_1)\sigma_+\otimes\rho_B,$$

где

$$\rho_B = |vac\rangle\langle vac|$$

$$G_I(t) = \int |g_k|^2 dk e^{-i(\omega_k-\Omega)t}$$

Кроме того,

$$\mathcal{P}\sigma_+\otimes\rho_B = \sigma_+\otimes\rho_B$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$
$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}^{\mathrm{RWA}}_{\mathrm{SB,I}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) =$$

$$= -\left[\hat{H}^{\mathrm{RWA}}_{\mathrm{SB,I}}(t), \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk\right] =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \sigma_- \sigma_+ \otimes b_{k'} b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \otimes \delta(k - k') |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int dk e^{-i(\omega_k - \Omega)(t - t_1)} |g_k|^2 \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| =$$

$$= -G_I(t - t_1)\sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad \square$$

Пример

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3} + \mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(G_I(t-t_2)G_I(t_1-t_3) + G_I(t-t_3)G_I(t_1-t_2))\sigma_+ \otimes \rho_B
\end{gathered}
$$

Ранее было

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda^2 \int_0^t ds G_I(t-s)x(s), \qquad x(0) = 1$$

При $x(t) \neq 0$)

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho(t)] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right),$$

где

$$\gamma(t) = -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\frac{d}{dt}x(t)}{x(t)}, \qquad \Delta\varepsilon(t) = -\,\mathrm{Im}\,\frac{\frac{d}{dt}x(t)}{x(t)}.$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$
$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-,\rho] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right)\right) \otimes \rho_B$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho\otimes\rho_B) =$$

$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-,\rho] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right)\right)\otimes\rho_B$$

$$\mathcal{K}_t(\sigma_+\otimes\rho_B) = -\left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right)(\sigma_+\otimes\rho_B)$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$

$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\} \right) \right) \otimes \rho_B$$

$$\mathcal{K}_t(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -\left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2} \right) (\sigma_+ \otimes \rho_B)$$

$$i\Delta\varepsilon^{(2)}(t) + \frac{\gamma^{(2)}(t)}{2} = \int_0^t dt_1 G_I(t - t_1)$$

$$i\Delta\varepsilon^{(4)}(t) + \frac{\gamma^{(4)}(t)}{2} =$$

$$= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (G_I(t-t_2)G_I(t_1-t_3) + G_I(t-t_3)G_I(t_1-t_2))$$

Пример

В условиях резонанса:

$$G_I(t) = g^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \gamma_M(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}), \gamma_M = \frac{4g^2}{\gamma}, \qquad \varepsilon^{(2)}(t) = 0$$

$$\gamma^{(4)}(t) = \frac{2\gamma_M^2}{\gamma}\left(\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}t - \frac{\gamma}{2}t\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad \varepsilon^{(4)}(t) = 0$$

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$

$$= \left(\lambda^2\gamma^{(2)}(t) + \lambda^4\gamma^{(4)}(t) + O(\lambda^6)\right)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho(t)\}\right) \otimes \rho_B$$

Пример

У нас сократились члены вида

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\sigma_+ \otimes \rho_B = G_I(t-t_1)G_I(t_2-t_3)\sigma_+ \otimes \rho_B$$

В случае $G_I(t) = g^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 G_I(t-t_1)G_I(t_2-t_3) = \frac{4g^4}{\gamma^3}(-4+\gamma t+e^{-\frac{\gamma}{2}t}(4+\gamma t))$$

$\to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Коррелированный проектор

- Breuer, H. P. (2007). Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems. Physical Review A, 75(2), 022103.

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$$

$$\mathcal{P} = I \otimes \Lambda,$$

где I — единичный супероператор (таким образом, информацию о системе полная — мы ничего не выкинули), Λ — вполне положительное сохраняющие след отображение, само являющееся идемпотентном $\Lambda^2 = \Lambda$.

Вполне положительное отображение: Λ называется вполне положительным, если $\forall X^\dagger = X \geqslant 0$

$$(I_n \otimes \Lambda) X \geqslant 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Коррелированный проектор

Утверждение. Такой проектор может быть представлен в виде

$$\mathcal{P}\rho = \sum_n \mathrm{Tr}_B((I \otimes A_n)\rho) \otimes B_n,$$

где

$$B_n = B_n^\dagger, \quad A_n = A_n^\dagger, \quad \mathrm{Tr}_B\, B_n A_m \equiv \langle\langle B_n | A_m \rangle\rangle = \delta_{nm}$$

— операторы в $\mathcal{H}_B$, $\{A_n\}$ — линейно независимы и $\{B_n\}$ также (биортогональные базисы). И

$$\sum_n A_n^T \otimes B_n \geqslant 0$$

(условие вполне положительности).

Коррелированный проектор

Проверим, что он действительно является проектором

$$\mathcal{P}^2\rho = \sum_n \mathrm{Tr}_B(A_n \mathcal{P}\rho) \otimes B_n = \sum_{nm} \mathrm{Tr}_B(A_n \, \mathrm{Tr}_B(A_m\rho) \otimes B_m) \otimes B_n$$
$$= \sum_{nm} \mathrm{Tr}_B(A_n B_m) \, \mathrm{Tr}_B(A_m\rho) \otimes B_n = \sum_{nm} \delta_{nm} \, \mathrm{Tr}_B(A_m\rho) \otimes B_n$$
$$= \sum_n \mathrm{Tr}_B(A_n\rho) \otimes B_n = \mathcal{P}\rho$$

(Для этого не требуется вполне положительность.)

Коррелированный проектор

Сопряжённый проектор:

$$\mathcal{P}^* X = \sum_n \mathrm{Tr}_B((I \otimes B_n) X) \otimes A_n,$$

Коррелированный проектор: Частные случаи

Стандартный проектор:
Единственный член в сумме

$$A_1 = I, \qquad B_1 = \rho_B$$

Проверим условия:

$$B_1 = B_1^\dagger, \quad A_1 = A_1^\dagger, \quad \mathrm{Tr}_B\, B_1 A_1 = \mathrm{Tr}_B\, \rho_B = 1$$

$$A_1^T \otimes B_1 = I \otimes \rho_B \geqslant 0$$

Коррелированный проектор: Частные случаи

Сепарабельный проектор:

Ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}_B$

$$\Pi_n \Pi_m = \delta_{nm} \Pi_m, \qquad \Pi_n^\dagger = \Pi_n, \qquad \sum_n \Pi_n = I_B$$

$$A_n = \Pi_n, \qquad B_n = \frac{\Pi_n \rho_B \Pi_n}{\mathrm{Tr}_B\, \Pi_n \rho_B}$$

(B_n — апостериорное состояние в результате селективного измерения наблюдаемой вида $\sum_n \lambda_n \Pi_n$)

$$\mathcal{P}\rho = \sum_n \mathrm{Tr}_B\, \Pi_n \rho \otimes \frac{\Pi_n \rho_B \Pi_n}{\mathrm{Tr}_B\, \Pi_n \rho_B}$$

Коррелированный проектор: Динамика

Если обозначать $b_n = \mathrm{Tr}_B(A_n \rho)$, то получим уравнение Накажимы-Цванцыга (начальное условие согласовано с проектором $\mathcal{P}\rho(0) = \rho(0)$)

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = \sum_m \int_0^t ds (\mathcal{K}_s^t)_{nm} b_m(s)$$

$$(\mathcal{K}_s^t)_{nm} = \mathrm{Tr}_B((I \otimes A_n) \mathcal{K}_s^t (I \otimes B_m))$$

$$(\mathcal{K}_s^t)_{nm} = -\lambda^2 \,\mathrm{Tr}_B(I \otimes A_n [H_I(t), [H_I(s), I \otimes B_m]]) + O(\lambda^4)$$

Локальный по времени генератор

$$\frac{d}{dt}b_n(t) = \sum_m (\mathcal{K}_t)_{nm} b_m(s)$$

$$(\mathcal{K}_t)_{nm} = (\mathcal{K}_t)_{nm} = \mathrm{Tr}_B((I \otimes A_n)\mathcal{K}_t(I \otimes B_m))$$

$$(\mathcal{K}_t)_{nm} = -\lambda^2 \int_0^t dt_1 \, \mathrm{Tr}_B(I \otimes A_n [H_I(t), [H_I(t_1), I \otimes B_m]]) + O(\lambda^4)$$

Проектор в рамках теории Фёрстера и модифицированного уравнения Редфильда

- A. Trushechkin. Calculation of Coherences in Förster and Modified Redfield Theories of Excitation Energy Transfer. The Journal of Chemical Physics 151: 7 (2019): 074101.

$$\mathcal{P}\rho = \sum_n \mathrm{Tr}_B(\langle n|\rho|n\rangle)|n\rangle\langle n| \otimes \rho_{B,n},$$

где $\rho_{B,n}$ — фиксированные матрицы плотности.
(Уже не вся информация о системе, часть уже содержится в $\mathcal{Q}$, что сближает с проекторами, которые уже ранее рассматривались в статистической физике.)