

Семинар по теории операторов и теории функций
(ПОМИ, ауд. 311, по понедельникам, 17-30 — 19-00)

Заседание 17.10.2011

Функция Беллмана для интегральных функционалов
в пространстве ВМО на отрезке

Д.М.Столяров

(по совместной работе с

В.И.Васюниным, П.Б.Затицким, П.Н.Иванишвили и Н.Н.Осиповым)

Пусть I — ограниченный интервал вещественной прямой. Среднее $\frac{1}{|I|} \int_I g$ функции g по интервалу I обозначим через $\langle g \rangle_I$. Пусть f — функция на $\mathbb{R}$ (мы предполагаем, что f достаточно регулярна и растет не слишком быстро). Для функций φ из пространства $\text{ВМО}(I)$ положим:

$$F[\varphi] = \langle f(\varphi) \rangle_I.$$

Нас интересуют оценки функционала F . Опыт показывает, что полезно рассмотреть так называемую функцию Беллмана, снискавшую популярность в гармоническом анализе в последние полтора десятилетия:

$$B_{\varepsilon, f}(x_1, x_2) = \sup_{\|\varphi\|_{\text{ВМО}} \leq \varepsilon} \{ \langle f(\varphi) \rangle_I \mid \langle \varphi \rangle_I = x_1, \langle \varphi^2 \rangle_I = x_2 \}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 - x_2 \in [0, \varepsilon^2]$$

Знание функции Беллмана дает точную оценку функционала F . В случаях $f(t) = \chi_{(-\infty, -\lambda] \cup [\lambda, +\infty)}(t)$, $f(t) = e^t$, $f(t) = |t|^p$ мы получим соответственно знаменитое неравенство Джона–Ниренберга, его версию в интегральной форме и эквивалентность определений ВМО при помощи разных L^p . В этих частных случаях функции Беллмана были вычислены в работах [1] и [2]. Мы обобщаем этот подход на случай почти произвольной функции f .

Оказывается, что функция $B_{\varepsilon, f}(x_1, x_2)$ обладает замечательными аналитическими свойствами: она локально вогнута на своей области определения и является наименьшей локально вогнутой функцией с граничным условием $B_{\varepsilon, f}(x_1, x_1^2) = f(x_1)$. Такая функция обязательно удовлетворяет однородному уравнению Монжа–Ампера. Мы найдем точное выражение для функции $B_{\varepsilon, f}(x_1, x_2)$ в виде интегрально-дифференциального выражения от f .

Список литературы

- [1] L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality*, Transactions of the American Mathematical Society, **363** (2011), 4135–4169; preprint, 2007, <http://arxiv.org/abs/0709.4332>.
- [2] L. Slavin and V. Vasyunin, *Sharp L^p estimates on BMO*, preprint.