Десятая проблема Гильберта и модели вычислительных процессов

Ю.В.Матиясевич

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Давид Гильберт, *“Математические проблемы”*, [1900]

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung. Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoefficienten sei vorgelegt: *man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет*.

Диофантовы уравнения

Форма и содержание

$$P(x_1, \dots, x_m) = 0$$

«… требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.»

Целые рациональные числа: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Гипотеза Мартина Дейвиса

Перечислимые множества вместо алгоритмов

Определение. Множество $\mathfrak{M}$, состоящее из натуральных чисел, называется *диофантовым* если оно имеет *диофантово представление*

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [P(a, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

где P – многочлен с целыми коэффициентамию

Очевидный факт. *Каждое диофантово множество является перечислимым.*

Гипотеза Мартина Дейвиса. *Каждое перечислимое множество является диофантовым.*

Г.С.Цейтин. Один способ изложения теории алгоритмов и перечислимых множеств. *Труды МИАН*, том 72 (1964) 69–99.

P. Martin-Löf. *Notes on Constructive Mathematics*. Almqvist & Wikseil, Stockholm, 1970.

Гипотеза Мартина Дейвиса

Первый шаг к доказательству

Теорема (Martin Davis [1953]). *Каждое перечислимое множество имеет представление вида*

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists z \forall y_{\leq z} \exists x_1 \ldots x_m [P(a_, x_1, \ldots, x_m, y, z) = 0].$$

Такие представления получили название *нормальной формы Дейвиса*.

Теорема (Kurt Gödel [1931]). *Каждое перечислимое множество имеет арифметическое представление.*

Гипотеза Дейвиса стала теоремой

Все перечислимые множества диофантовы

DPR-теорема (M. Davis, H. Putnam, J. Robinson [1961]). *Каждое перечислимое множество имеет экспоненциально диофантово представление*

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [E(a, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0]$$

Здесь E – так называемый экспоненциальный многочлен, то есть выражение, построенное по обычным правилам из переменных и конкретных целых чисел с помощью операций сложения, умножения и возведения в степень.

DPRM-теорема [1970]. *Понятия «диофантово множество» и «перечислимое множество» совпадают.*

Гипотеза Дейвиса стала теоремой

Все перечислимые множества эффективно диофантовы

DPRM-теорема [1970]. *Понятия «диофантово множество» и «перечислимое множество» совпадают.*

По заданию перечислимого множества в любой стандартной форме можно построить его диофантово представление.

1. Построить арифметическую формулу со многими ограниченными кванторами общности;
2. Преобразовать эту формулу в нормальную форму Дейвиса с одним ограниченным квантором общности;
3. Устранить этот ограниченный квантор общности ценой перехода к экспоненциально диофантовым уравнениям;
4. Устранить возведение в степень.

E. L. Post.
Formal reductions of the general combinatorial decision problem
Amer. J. Math., v. 65 (1943), 197-215.

Перепечатано в
The collected works of E. L. Post
M. Davis, editor. Birkhäuser, Boston, 1994

$$AX \mapsto XB$$

Экзистенциальная арифметизация I

Машины Тьюринга

		a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

$$\binom{a+b}{b} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = 2^{\beta_2}\,3^{\beta_3}\,5^{\beta_5}\ldots$$

Теорема (E.Kummer [1852]) *Для определения β_p достаточно записать числа a и b в позиционной соистеме счисления с основанием p и сложить их «столбиком»; количество сделанных переносов из разряда в разряд есть в точности β_p.*

Матиясевич [1976], [1993], [2009]. См. также P. E. van Boas [1983], [1997].

Экзистенциальная арифметизация II

Регистровые машины

Регистровая машина имеет конечное количество *регистров* R1, …, Rn, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число. Машина выполняет *программу*, состоящую из конечного количества *инструкций*, помеченных символами S1, …, Sm.

I. Sk: Rl $++$; goto Si
II. Sk: if R$l > 0$ then Rl $--$; goto Si else goto Sj
III. Sk: STOP

Регистровые машины были введены M. L. Minsky [1961], [1967], J. Lambek [1961], Z. A. Melzak [1961], J. C. Shepherdson and H. E. Sturgis [1963]

J. P. Jones and Yu. Matiyasevich [1984], [1991], Матиясевич [2009].

Экзистенциальная арифметизация III

Частично рекурсивные функции

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}^n_q(a_1,\dots,a_n) &= q\\
\mathrm{U}^n_k(a_1,\dots,a_n) &= a_k\\
\mathrm{S}(a) &= a+1\\
f(a_1,\dots,a_n) &= g(h_1(a_1,\dots,a_n),\dots,h_m(a_1,\dots,a_n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0,a_1,\dots,a_n) &= g(a_1,\dots,a_n),\\
f(a+1,a_1,\dots,a_n) &= h(a,f(a,a_1,\dots,a_n),a_1,\dots,a_n)
\end{aligned}
$$

$$
f(a_1,\dots,a_n) = \mu_y(g(y,a_1,\dots,a_n)=0)
$$

$$
f(a_1,\dots,a_n)=b \Longleftrightarrow \exists x_1\dots x_m[F(a_1,\dots,a_n,b,x_1,\dots,x_m)=0]
$$

Экзистенциальная арифметизация III

Частично рекурсивные функции (прод.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^n_q(a_1,\dots,a_n) = b &\iff b - q = 0\\
\mathrm{U}^n_k(a_1,\dots,a_n) = b &\iff b - a_k = 0\\
\mathrm{S}(a) = b &\iff b - a - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a_1,\dots,a_n) &= g(h_1(a_1,\dots,a_n),\dots,h_m(a_1,\dots,a_n))\\
f(a_1,\dots,a_n) = b &\iff \exists c_1\dots c_m\{g(c_1,\dots,c_m) = b\ \&\\
&\qquad\qquad h_1(a_1,\dots,a_n) = c_1\ \&\\
&\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad h_m(a_1,\dots,a_n) = c_m\}
\end{aligned}$$

Экзистенциальная арифметизация III

Частично рекурсивные функции (прод.)

$$\begin{aligned} f(0,c) &= g(c), \\ f(a+1,c) &= h(a, f(a), c) \end{aligned}$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{l,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{l,n} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}) \\ \dots \\ \phi(a_{l,1}, \dots, a_{l,n}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(0,c) \\ f(1,c) \\ \vdots \\ f(a,c) \\ f(a+1,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(c) \\ h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f(0,c) \\ \vdots \\ f(a-1,c) \\ f(a,c) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c \\ c \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

Экзистенциальная арифметизация III

Частично рекурсивные функции (прод.)

$$
\begin{array}{rcl}
f(0,c) & = & g(c), \\
f(a+1,c) & = & h(a, f(a), c)
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} X \\ \\ \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(c) \\ \\ h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}, X, \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}
$$

$$
X = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(0,c) \\ \vdots \\ f(a,c) \end{bmatrix}, \quad x = f(a+1,c)
$$

Экзистенциальная арифметизация III

Частично рекурсивные функции (прод.)

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{l,1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{l,n} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}) \\ \dots \\ \phi(a_{l,1}, \dots, a_{l,n}) \end{bmatrix}$$

$$\phi(A_1, \dots, A_n) = B \iff \exists x_1 \dots x_m [F(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \bar{B}, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

Матиясевич [1994], [2009].

Следствие DPRM-теоремы. Существует *универсальное диофантово уравнение*

$$U(a, k, y_1, \dots, y_M) = 0$$

обладающее следующим свойством: *каково бы ни было диофантово уравнение*

$$P(a, x_1, \dots, x_m) = 0 \qquad (*)$$

существует (и эффективно вычислим) индекс k_P такой, что при любом значении параметра a уравнение $(*)$ имеет решение в неизвестных $x_1, \dots, x_m$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$U(a, k_P, y_1, \dots, y_M) = 0 \qquad (**)$$

имеет решение в неизвестных $y_1, \dots, y_M$.

Схлопывание диофантовой иерархии

Текущие рекорды

Решение произвольного параметрического диофантова уравнения может быть сведено к решению другого диофантова уравнения с теми же параметрами, имеющего степень D относительно M неизвестных, где $\langle D, M\rangle$ может быть любой из следующих пар:

$$\langle 4,58\rangle,\ \langle 8,38\rangle,\ \langle 12,32\rangle,\ \langle 16,29\rangle, \langle 20,28\rangle,\ \langle 24,26\rangle,\ \langle 28,25\rangle,$$
$$\langle 36,24\rangle,\ \langle 96,21\rangle,\ \langle 2668,19\rangle,\ \langle 2\times 10^5,14\rangle, \langle 6.6\times 10^{43},\ 13\rangle,$$
$$\langle 1.3\times 10^{44},12\rangle,\ \langle 4.6\times 10^{44},11\rangle,\ \langle 8.6\times 10^{44},10\rangle,\ \langle 1.6\times 10^{45},9\rangle.$$

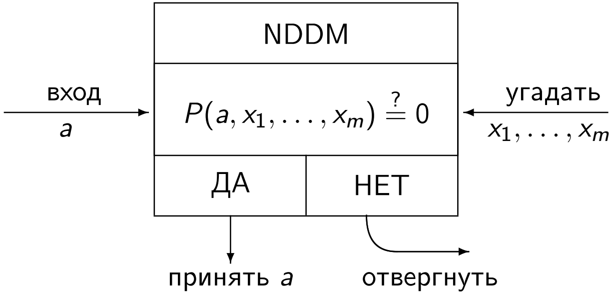
Эти границы равномерны относительно количества параметров при условии, что D – это степень универсального уравнения относительно только неизвестных.

Открытая проблема. *Существуют ли аналогичные равномерные границы, если в качестве D брать полную степень уравнения (относительно и неизвестных, и параметров)?*

Диофантовы машины

Формализация недетерминизма

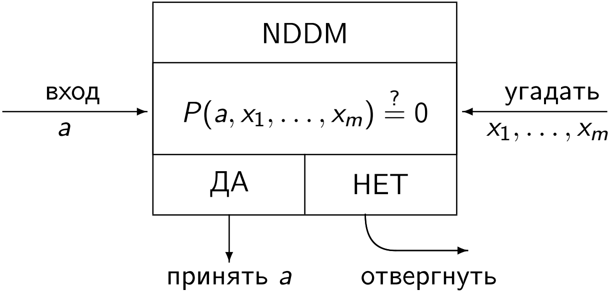
Leonard Adleman и Kenneth Manders [1976] ввели понятие *недетерминированной диофантовой машины*, NDDM .



DPRM-теорема: NDDM имеют такую же вычислительную силу как, например, машины Тьюринга, то есть любое множество, принимаемое некоторой машиной Тьюринга, принимается некоторой NDDM, и, очевидно, наоборот.

Диофантова сложность

Определения



SIZE(a)=минимально возможное значение $|x_1| + \cdots + |x_m|$, где $|x|$ обозначает длину двоичной записи x.

Leonard Adleman и Kenneth Manders [1975] ввели в рассмотрение класс **D** состоящий из множеств $\mathfrak{M}$ имеющих представления вида

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_1 \dots x_m \big[P(a, x_1, \dots, x_m) = 0 \,\&\, |x_1| + \cdots + |x_m| \leq |a|^k \big].$$

Открытая проблема. $\mathbf{D} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$.

Theorem (Chris Pollett [2003]).

$$\mathbf{D} \supseteq \mathbf{co-NLOGTIME} \Longrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{NP}$$

Рост решений

Ускорение диофантовых уравнений

Теорема (M.Davis [1973] по M.Blum [1967]). *Для любой всюду определенной вычислимой функции $\alpha(a, x)$ можно построить два однопараметрических уравнения*

$$P_1(a, x_1, \ldots, x_k) = 0, \qquad P_2(a, x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (*)$$

такие, что

(i) *для любого значения параметра a ровно одно из этих уравнений имеет решение;*

(ii) *если дифантовы уравнения*

$$Q_1(a, y_1, \ldots, y_l) = 0, \qquad Q_2(a, y_1, \ldots, y_l) = 0 \qquad (**)$$

имеют решение при тех же значениях параметра a, что и, соответственно, уравнения (*), то можно построить третью пару диофантовых уравнений

$$R_1(a, z_1, \ldots, z_m) = 0, \qquad R_2(a, z_1, \ldots, z_m) = 0 \qquad (***)$$

такую, что

- *эти уравнения имеют решение опять при тех же значениях параметра a, что и, соответственно, уравнения (*),*
- *для любого достаточно большого значения параметра a для любого решения $y_1, \ldots, y_l$ одного из уравнений (**) найдется решение $z_1, \ldots, z_m$ соответствующего уравнения из (***) такое, что*

$$y_1 + \cdots + y_l > \alpha(a, z_1 + \cdots + z_m).$$

Псевдодетерминизм (Unambiguity)

Уравнения с единственным решением

Определение. Чисто экзистенциальное представление

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_1 \ldots x_m T(a, x_1, \ldots, x_m)$$

называется *однократным* если при любом значении параметра a существует не более одного выбора значений $x_1, \ldots, x_m$.

Теорема (Матиясевич [1974] как усиление DPR[1961]). *Каждое перечислимое множество $\mathfrak{M}$ имеет однократное экспоненциально диофантово представление*

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0].$$

Открытая проблема. *Верно ли, что каждое перечислимое множество имеет однократное диофантово представление?* Иными словами, *верно, что псевдодетерминированные диофантовы машины также мощны как (детерминированные или недетерминированные) машины Тьюринга?*

Уравнения с конечным числом решений

Задача эффективизации

Пусть диофантово уравнение

$$P(a, x_1, \dots, x_m) = 0, \qquad (*)$$

имеет при каждом значении параметра a конечное количество решений в $x_1, \dots, x_m$.

Этот факт можно выразить двумя способами:

1. *Уравнение* $(*)$ *имеет не более* $\nu(a)$ *решений;*
2. *Для каждого решения уравнения* $(*)$ *справедливы неравенства*

$$x_1 < \sigma(a), \dots, x_m < \sigma(a).$$

Здесь ν и σ – некоторые функции, определенные для всех значений a.

Экспоненциально диофантовы уравнения

Эффективизация невозможна

Рассмотрим однократное экспоненциально диофантово представление

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

неразрешимого множества $\mathfrak{M}$. Мы имеем:

- *При любом значении* a *экпоненциально диофантово уравнение*

  $$E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \qquad (*)$$

  имеет не более одного решения в $x_1, x_2, \ldots, x_m$*;*
- *Для любой всюду определенной вычислимой функции* α *найдется такое значение* a*, что уравнение* $(*)$ *имеет (единственное) решение* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *и это решение удовлетворяет неравенству*

  $$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\} > \alpha(a).$$

Открытая проблема. *Есть ли подобные принципиально неэффективизируемые результаты в теории диофантовых уравнений?*

Сложнее 10-й проблемы Гильберта

Вычислительный хаос в теории чисел

Gregory Chaitin [1987] построил конкретное однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение и рассмотрел множество всех значений параметра, при которых уравнение имеет бесконечно много решений:

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists^{\infty} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

Chaitin доказал, что так называемая *префиксная (prefix-free)* колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

равна n (с точностью до аддитивной константы).

Сложнее 10-й проблемы Гильберта

Вычислительный хаос в теории чисел

Toby Ord и Tien D. Kieu [2003] построили другое однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение, которое при каждом значении параметра имеет конечное количество решений и рассмотрели множество всех значений параметра, при которых количество решений четно:

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists^{\text{even}} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

Ord и Kieu доказали, что префиксная колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

также равна n (с точностью до аддитивной константы).

Сложнее 10-й проблемы Гильберта

Вычислительный хаос в теории чисел

Теорема (Матиясевич [2006]). *Пусть $\mathfrak{U}$ – разрешимое бесконечное множество, дополнение которого также бесконечно. Можно построить однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение*

$$E(a, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \qquad (*)$$

которое при каждом значении параметра имеет конечное количество решений и такое, что префиксная колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

равна n (с точностью до аддитивной константы), где

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists^{\mathfrak{U}} x_1 \dots x_m [E(a, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0]$$

– это множество всех значений параметра a, при которых можность множества решений уравнения $(*)$ лежит в $\mathfrak{U}$.

Унификация

Невсеобщее равенство

$$E_1(x_1, \dots, x_m) = E_2(x_1, \dots, x_m)$$

Проблема унификации для чистого исчисления предикатов первого порядка разрешима.

Проблема унификации для исчисления предикатов третьего порядка неразрешима. L. D. Baxter [1978] дал новое доказательство этого факта с использованием неразрешимости диофантовых уравнений.

W. D. Golfarb [1981] установил неразрешимость проблема унификации для исчисления предикатов второго порядка, исходя из неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Унификация

Как перемножать термы?

$$T_n = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n \ \text{times}}(x)\ldots));$$

Сложение $n + m$: подстановка T_m вместо x в T_n

Умножение $n \times m$: ?

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев установили неразрешимость одновременной жесткой E-унификации путем сведения к ней так называемой *проблемы монадической полуунификации (monadic semi-unification problem)*.

Неразрешимость проблемы монадической полуунификации установил ранее M. Baaz [1993] путем сведения к ней проблемы унификации для исчисления предикатов второго порядка.

W. D. Golfarb [1981] установил неразрешимость проблемы унификации для исчисления предикатов второго порядка, исходя из неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Унификация

Счастливый конец

А. Воронков и А. Дегтярев [1996] дали прямое доказательство неразрешимость одновременной жесткой E-унификации на основе неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Унификация

Другие результаты

Теоремы о неразрешимости разных видов унификации получили на основе неразрешимости 10-й проблемы Гильберта A. Bockmayr [1983], E. K. Burke [1993], W. M. Farmer [1991], M. Livesey, J. Siekmann, P. Szabó, and E. Unvericht [1979], E. Tiden, and S. Arnborg [1987].

Проблема включения.

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{V_1, \ldots, V_m\}$ и $\{W_1, \ldots, W_m\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A в первой системе, достижим из вектора A также и во второй системе?

Теорема (Michael Rabin [1966,1972], не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Результат Rabin'а усилили до неразрешимости *проблемы эквивалентности для систем векторного сложения* M. Hack [1976] и T. Araki и T. Kasami [1976].

Диофантовы игры

Правила

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....
- Петр выбирает a_m
- Николай выбирает x_m

Николай объявляется победителем в том и только том случае, когда значение многочлена оказывается равным нулю.

Упражнение. *Кто имеет выигрышную стратегию в игре, задаваемой уравнением*

$$(x_1 + a_2)^2 + 1 - (x_2 + 2)(x_3 + 3) = 0?$$

Подсказка. Победа гарантирована Петру в том и только том случае, когда количество простых чисел вида $n^2 + 1$ бесконечно.

Теорема (Jones[1982]) *Николай имеет выигрышную стратегию, но не имеет вычислимой выигрышной стратегии в игре*

$$\Big\{\{a_1 + a_6 + 1 - x_4\}^2 \cdot \Big\{\Big\langle (a_6 + a_7)^2 + 3a_7 + a_6 - 2x_4\Big\rangle^2$$
$$+ \Big\langle \Big[(x_9 - a_7)^2 + (x_{10} - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - a_6)^2 + (x_{10} - a_8)^2((x_4 - a_1)^2$$
$$+ (x_{10} - a_9 - x_1)^2)\Big]\Big[(x_9 - 3x_4)^2 + (x_{10} - a_8 - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - 3x_4 - 1)^2$$
$$+ (x_{10} - a_8 a_9)^2\Big] - a_{12} - 1\Big\rangle^2 + \Big\langle [x_{10} + a_{12} + a_{12}x_9 a_4 - a_3]^2$$
$$+ [x_5 + a_{13} - x_9 a_4]^2\Big\rangle\Big\} - x_{13} - 1\Big\}\{a_1 + x_5 + 1 - a_5\}\Big\{\Big\langle (x_5 - x_6)^2$$
$$+ 3x_6 + x_5 - 2a_5\Big\rangle^2 + \Big\langle \Big[(a_{10} - x_6)^2 + (a_{11} - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - x_5)^2$$
$$+ (a_{11} - x_7)^2((a_5 - a_1)^2 + (a_{11} - x_8 - a_2)^2)\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5)^2$$
$$+ (a_{11} - x_7 - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5 - 1)^2 + (a_{11} - x_7 x_8)^2\Big] - x_{11} - 1\Big\rangle^2$$
$$+ \Big\langle [a_{11} + x_{11} + x_{11}a_{10}x_3 - x_2]^2 + [a_{11} + x_{12} - a_{10}x_3]^2\Big\rangle\Big\} = 0.$$

Другие результаты
Игры Lachlan'a

A. H. Lachlan [1970] ввел другой класс игр как возможный инструмент установления результатов про решетку перечислимых множеств и высказал гипотезу, что для этих игр есть алгоритм распознавания, который из двух игроков имеет выигрышную стратегию.

M. Kummer [2006] получил много результатов о неразрешимости игр Lachlan'a, используя неразрешимсть 10-й проблемы Гильберта.

Другие результаты

Классические игры

K. Prasad [1991] установил, что для «традиционных» некоперативных игр нескольких лиц с полиномиальными функциями платежей невозможен алгоритм, который по произвольной игре говорил бы, имеет ли она *равновесие Нэша (Nash equilibrium) в чистых стратегиях*; для получения аналогичного результата для *смешанных стратегий* требуются однократные представления и поэтому неразрешимость была установлена только для случая, когда функции платежа строятся с помощью сложения, умножения и возведения в степень.

K. Prasad [1991] также перенес результаты Chaitin'a с вопросов о бесконечности количества решений у экспоненциально диофантовых уравнений на вопросы о бесконечности количества равновесий Нэша.

Правило рекомбинации:

$$U_1 \# U_2 \& U_3 \# U_4 : \langle x_1 U_1 U_2 x_2, y_1 U_3 U_4 y_2 \rangle \mapsto \langle x_1 U_1 U_4 x_2, y_1 U_3 U_2 y_2 \rangle$$

Правила рекомбинации сами по себе порождают только регулярные языки, тем не мене, при введении некоторой управляющей структуры они становятся столь же мощными как, скажем, машины Тьюринга.

P. Frisco [2001] дал новое доказательство этого факта, используя DPRM-теорему.

Вычислительные модели, мотивированные биологией

Метаболизм

Мембранные вычисления, мотивированные обменом веществ в живой клетке, ввел George Paun [1998].

Á. R. Jiménez и M. J. P. Jiménez [2002], а также C. Li., Z. Dang, O. H. Ibarra и H.-Ch. Yen [2005] использовали DPRM-теорему для демонстрации вычислительной силы разных версий мембранных вычислений.