Торическая топология

В.М.Бухштабер

Институт им. В.А.Стеклова, РАН

⟨buchstab@mi.ras.ru⟩

Общеинститутский семинар

“Математика и ее приложения”

Москва

18 марта 2010

Абстракт

Центральным объектом торической топологии являются действия компактного тора на топологических пространствах, локально эквивалентные действию стандартного n-мерного тора в открытых подмножествах линейного комплексного пространства. Такие действия естественно возникают в различных разделах математики. Существуют замечательные функториальные конструкции таких действий, позволяющие вводить новые комбинаторные инварианты выпуклых многогранников и триангуляций пространств, получать торические представители в классе кобордизмов любого гладкого многообразия, допускающего вложение с комплексным нормальным расслоением в евклидово пространство, строить широкий класс комплексных некэлеровых многообразий.

Доклад посвящен ключевым результатам и приложениям торической топологии, нового направления исследований на стыке эквивариантной топологии, комбинаторики многогранников, алгебраической, комплексной и симплектической геометрий.

Содержание

Обозначения и соглашения

Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ поле вещественных и комплексных чисел, соответственно.
Обозначим через $\mathbb{Z}^n$ свободную абелеву группу с базисом $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на j-ом месте, $1 \leqslant j \leqslant n$.
Положим $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}^n = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{C}$.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как евклидово пространство с каноническим скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

и канонической ориентацией, задаваемой базисом e_j, $j = 1, \ldots, n$.

Будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ при помощи изоморфизма над $\mathbb{R}$, который переводит e_j в e_{2j-1} и $(\sqrt{-1})e_j$ в e_{2j}. Фиксируем каноническую ориентацию в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через $\mathbb{T}^n$ стандартный n-мерный тор $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.
Отождествим $\mathbb{T}^n$ с многообразием
$\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_j| = 1\}$ и образом при проекции $\exp\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n \ : \ \exp x = z$, где $z_j = \exp(2\pi\sqrt{-1}x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.
Тор $\mathbb{T}^n$ также имеет каноническую ориентацию.

Существуют два алгоритмически различных способа определить выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Выпуклым многогранником* в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_q)$ конечного набора точек $v_1, \ldots, v_q$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. *Выпуклым полиэдром* в $\mathbb{R}^n$ называется пересечение конечного набора полупространств в $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (a_i, x) + b_i \geqslant 0, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$.
Ограниченный выпуклый полиэдр называется *(выпуклым) многогранником* P.

Подмножество в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой конечного набора точек тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного набора полупространств и ограничено.

Симплексом Δ^k размерности k в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка набора из $(k+1)$ точек в $\mathbb{R}^n$, не лежащих в одной аффинной $(k-1)$-мерной гиперплоскости. Все грани k-мерного симплекса являются симплексами размерности не выше k.

Стандартным n-симплексом называется выпуклая оболочка точек $e_1, \ldots, e_n$ и $0 = (0, \ldots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$. Стандартный n-симплекс задается $(n+1)$ неравенствами

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad \text{и} \quad -x_1 - \ldots - x_n + 1 \geqslant 0.$$

Правильным n-симплексом называется выпуклая оболочка точек $e_1, \ldots, e_{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Симплициальные и простые многогранники

Два различных определения выпуклых многогранников приводят к двум различным понятиям многогранников *общего положения*.

Набор из $m > n$ точек $\mathbb{R}^n$ находится в *общем положении*, если никакие $n + 1$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости.

С точки зрения определения 1, выпуклый многогранник является многогранником общего положения, если он является выпуклой оболочкой набора точек в общем положении.

Все собственные грани такого многогранника являются симплексами, то есть любая гипергрань имеет минимальное возможное число вершин (а именно, n).
Такие многогранники называются *симплициальными*.

Набор из $m > n$ гиперплоскостей $\langle a_i, x\rangle + b_i = 0$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ находится в *общем положении*, если никакая точка не содержится более чем в n гиперплоскостях.

С точки зрения определения 2, выпуклый многогранник P^n является многогранником общего положения, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении.

В каждой вершине такого многогранника P^n сходятся в точности n гиперграней. Такие многогранники называются *простыми*.

Каждая грань простого многогранника есть снова простой многогранник.

Определение. Для любого выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ определено *полярное множество*

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, x' \rangle + 1 \geqslant 0 \ \text{ для всех } \ x' \in P\}.$$

В выпуклой геометрии хорошо известно:

- если $P = \mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_q)$, то P^* – выпуклый полиэдр;
- если P полиэдр с $b_i = 1$, то $P^* = \mathrm{conv}(0, a_1, \ldots, a_m)$;
- если $0 \in P$, то $(P^*)^* = P$;
- если P многогранник и $0 \in \mathrm{Int}\, P$, то P^* также многогранник;
- если P^* многогранник, то его решетка граней получается из решетки граней P обращением отношения порядка; в частности, если P – простой многогранник, то P^* – симплициальный, и наоборот.

Многогранник P^* называется *полярным* (или *двойственным*) к P.

Момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$

Положим
$\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^m$.

Конструкция. Согласно определению 2, пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник с $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Образуем $(m \times n)$-матрицу A_P, строками которой являются векторы a_i, записанные в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$, т.е. $(A_P)_{ij} = (a_i)_j$. Матрица A_P имеет ранг n. Положим $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (A_P x + b)_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Образом аффинного отображения

$$L_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ L_P(x) = A_P x + b$$

является n-мерная плоскость

$$\{y \in \mathbb{R}^m \ :\ y = A_P x + b\} \subset \mathbb{R}^m,$$

и $L(P) = \operatorname{Im} L_P(P)$ есть пересечение этой плоскости с положительным конусом $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$.

Пусть C – матрица размера $(m-n)\times m$ ранга $(m-n)$ такая, что $CA_P = 0$. Тогда

$$L(P) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon Cy = Cb,\ y_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Пример. Стандартный симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ имеет $m = n + 1$ гиперграней и может быть задан по определению 2 с

$$a_i = e_i,\ i = 1, \ldots, n,\ a_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} e_i, \ \text{ и } \ b = e_{n+1}.$$

Возьмем $C = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$L(\Delta^n) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}\colon Cy = Cb,\ y_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n+1\},$$

где $Cy = y_1 + \ldots + y_{n+1}$ и $Cb = 1$.
Получили правильный n-симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Каноническое действие стандартного тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ задает проекцию на пространство орбит $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \mathbb{C}^m/\mathbb{T}^m$

$$\rho\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\geqslant} \ : \ \rho(z_1,\ldots,z_m) = (|z_1|^2,\ldots,|z_m|^2).$$

Используя вложение $L_P\colon P \to \mathbb{R}^m_{\geqslant}$, мы получаем пространство $\mathscr{Z}_P$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_P & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ {\scriptstyle\rho_P}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ P & \xrightarrow{L_P} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{array}$$

Точку $z \in \mathscr{Z}_P$ можно однозначно записать в виде

$$z = (|z_i|\exp(2\pi\sqrt{-1}\varphi_i),\ i = 1,\ldots,m),$$

где $|z_i| \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi_i < 1$.

Таким образом, точка $z \in \mathscr{Z}_P$ имеет угловые координаты $(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ и моментные координаты $(y_1,\ldots,y_m)$, где $L_P\rho_P(z) = (y_1,\ldots,y_m)$ и $y_i = |z_i|^2$.

По построению, $\mathscr{Z}_P/\mathbb{T}^m = P$.

Пусть P_1 и P_2 простые многогранники. Тогда

$$\mathscr{Z}_{P_1\times P_2} = \mathscr{Z}_{P_1} \times \mathscr{Z}_{P_2}.$$

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ *простой* многогранник, задаваемый матрицей A и вектором b. Без ограничения общности можно считать, что $a_i = e_i,\ i = 1, \ldots, n$, т.е. $A^\top = (I_n, A_*^\top)$, где I_n – единичная матрица и A_* – матрица со строками $a_{n+k},\ k = 1, \ldots, m-n$.

Теорема. (В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, N. Ray)

1. $\mathscr{Z}_P = \bigcap\limits_{k=1}^{m-n} \mathscr{F}_k$, где

$$\mathscr{F}_k = \{z \in \mathbb{C}^m \ :\ \sum_{i=1}^{n} a_{n+k,i}(|z_i|^2 - b_i) = |z_{n+k}|^2 - b_{n+k}\}.$$

2. $\mathscr{Z}_P$ является $(n+m)$-мерным гладким оснащенным многообразием с гладким действием тора $\mathbb{T}^m$ и называется *момент-угол многообразием*.

3. Диагональная окружность $S_d^1 = \{z \in \mathbb{T}^m,\ z_1 = \ldots = z_m\}$ действует на $\mathscr{Z}_P$ свободно, и, следовательно, определены гладкое многообразие $\mathscr{Z}_P/S^1$ и гладкое многообразие $\mathscr{W} = \mathscr{Z}_P \times_{S^1} D^2$ с границей $\partial\mathscr{W} = \mathscr{Z}_P$.

Пусть $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ стандартный симплекс.
Тогда $m = n + 1$ и

$$\mathscr{Z}_{\Delta^n} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1 \right\} = S^{2n+1},$$

$\mathscr{Z}_{\Delta^n}/S^1 = \mathbb{C}P^n$ и $\mathscr{W} \to \mathbb{C}P^n$ – расслоение со слоем D^2, ассоциированное с расслоением Хопфа $E \to \mathbb{C}P^n$.

Пространство $S^{2n+1} \times S^1$ имеет структуру комплексного многообразия, называемого многообразием Хопфа. Используя результаты F. Bosio и L. Meersseman, получаем:

Теорема. Пусть P простой многогранник. Тогда:

1. если $n + m$ четное, то $\mathscr{Z}_P$ имеет структуру комплексного многообразия;

2. если $n + m$ нечетное, то $\mathscr{Z}_P \times S^1$ имеет структуру комплексного многообразия.

Заметим, что $H^2(\mathscr{Z}_P; \mathbb{Z}) = 0$, следовательно, многообразия $\mathscr{Z}_P$ и $\mathscr{Z}_P \times S^1$ являются некэлеровыми.

Свободные действия тора на $\mathcal{Z}_P$

Для каждого простого многогранника P обозначим через $s = s(P)$ максимальную размерность подгрупп $H \cong T^q \subset \mathbb{T}^m$, которые действуют на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Число $s(P)$ является комбинаторным инвариантом многогранника P.

Проблема. (В. М. Бухштабер, 2000)
Найти эффективный способ вычисления числа $s(P)$ в комбинаторных терминах.

Стационарная подгруппа любой точки из $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой, она пересекается с S^1_d лишь по единице. Следовательно, группа S^1_d действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно, и $s(P) \geqslant 1$.

Стационарные подгруппы, соответствующие вершинам многогранника имеют размерность n.
Каждая подгруппа размерности $> m - n$ в торе $\mathbb{T}^m$ нетривиально пересекается с любой n-мерной стационарной подгруппой, и поэтому не может действовать на $\mathcal{Z}_P$ свободно.
Таким образом, $s(P^n) \leqslant m - n$.

Пусть $\{F_1, \ldots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P и $[k] = \{1, \ldots, k\}$. Сюръективное отображение $\varrho \colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to [k]$ называется *правильной раскраской многогранника P в k цветов*, если $\varrho(F_i) \neq \varrho(F_j)$ для любой пары гиперграней F_i, F_j, имеющих общую грань коразмерности два.

Хроматическим числом $\gamma(P)$ многогранника P называется минимальное число k, для которого существует правильная k-цветная раскраска.

Имеем $\gamma(P^n) \geqslant n$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая двумерная грань в P^n имеет четное число ребер. Заметим также, что $\gamma(P^3) \leqslant 4$ по теореме о четырех красках.

И. В. Изместьев показал (2001), что

$$s(P) \geqslant m - \gamma(P).$$

Выделим следующие результаты Н. Ю. Ероховца о числе $s(P)$ простых многогранников:

1. Пусть $s(P)=1$, тогда P – симплекс.

2. Пусть $s(P)=2$, тогда либо $\gamma(P)=m$ и $m<\frac{7}{4}(n+1)+2$, либо $\gamma(P)=m-1$ и $m<\frac{3}{2}(n+1)+1$.

3. Рассмотрим кривую моментов $\{x(t)=(t,t^2,\dots,t^n)\} \subset \mathbb{R}^n$. Выберем m точек $x(t_i)$, $t_1<t_2<\dots<t_m$, и возьмем многогранник $P=\mathrm{conv}(v_1,\dots,v_m)$, где $v_k=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(x(t_k)-x(t_i))$. Используя определитель Вандермонда, получаем, что P является симплициальным.

По построению $0\in P$, следовательно, P^* – простой многогранник.

Имеем: $s(P^*)=2$ при $n+2\leqslant m\leqslant\frac{1}{48}(49n+83)$.
Следовательно, $2\leqslant m-n\leqslant\frac{1}{48}(n+83)$.

Пусть $H \subset \mathbb{T}^m$ – торическая подгруппа размерности $r \leqslant m-n$. Выбрав базис, запишем ее в виде

$$H = \left\{\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\langle s_1, \varphi\rangle\right), \ldots, \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\langle s_m, \varphi\rangle\right)\right\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^r$, и $s_1, \ldots, s_m$ – строки целочисленной матрицы S, которая задает мономорфизм $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^m$ на прямое слагаемое в $\mathbb{Z}^m$.

Для каждого подмножества $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset [m]$ обозначим через $S_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_n}$ подматрицу, полученную удалением строк $i_1, \ldots, i_n$ матрицы S.

Лемма. Подгруппа H действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно тогда и только тогда, когда для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ многогранника P^n матрица $S_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_n}$ определяет мономорфизм $\mathbb{Z}^r \hookrightarrow \mathbb{Z}^{m-n}$ на прямое слагаемое.

Следствие. Подгруппа $H \subset \mathbb{T}^m$ ранга $r = m-n$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно тогда и только тогда, когда $\det S_{\hat{i}_1 \ldots \hat{i}_n} = \pm 1$ для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$.

Пусть $\{F_1, \ldots, F_m\}$ – множество гиперграней *простого* многогранника P^n.

Определение. Целочисленная $(n \times m)$-матрица Λ задает характеристическое отображение

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n,$$

если ее столбцы $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}$ образуют базис в $\mathbb{Z}^n$ для любой вершины $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n}$.

Матрица Λ задает эпиморфизм $\ell\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$. Группа $K(\Lambda) = \ker \ell$ ранга $(m-n)$ действует свободно на $\mathscr{Z}_P$.

Таким образом, $s(P) = m - n$ тогда и только тогда, когда существует характеристическое отображение ℓ.

Определение. Комбинаторными *квазиторическими данными* называется пара (P, Λ), где P – ориентированный комбинаторный простой многогранник и Λ – целочисленная $(n \times m)$-матрица, задающая характеристическое отображение.

Квазиторические многообразия

Пространство орбит $M = \mathscr{Z}_P / K(\Lambda)$ является $2n$-мерным гладким многообразием с действием n-мерного тора $T^n = \mathbb{T}^m / K(\Lambda)$.
Обозначим это действие через α.

Лемма. Действие α удовлетворяет условиям *Davis–Januszkiewicz*:

1. α локально изоморфно стандартному покоординатному действию $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$;
2. существует проекция $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты действия α.

Определение. Многообразие $M = M(P, \Lambda)$ называется *квазиторическим многообразием со структурой* (A, Λ, b).

Торические многообразия

Квазиторические многообразия были введены Дэвисом и Янушкевичем как топологические аналоги *неособых проективных торических* многообразий X в алгебраической геометрии. Каждое такое многообразие X определяется простым многогранником

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a_i, x\rangle + b_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\},$$

вершины которого лежат в решетке $\mathbb{Z}^n$, и наборы векторов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

В этом случае определено характеристическое отображение $\ell \colon \{F_1, \ldots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ при помощи матрицы $A^\top$, которая задает эпиморфизм $\ell \colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ и его комплексификацию $\ell_{\mathbb{C}} \colon (\mathbb{C}^*)^m \to (\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$.

Положим $V_{i_1,\ldots,i_k}(P) = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0$, и $V(P) = \bigcup V_{i_1,\ldots,i_k}(P)$, где объединение берется по всем наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ таким, что $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = \varnothing$ в P.

В. В. Батырев показал, что каждое неособое проективное торическое многообразие X является фактором пространства $U(P) = \mathbb{C}^m \setminus V(P)$ по каноническому действию группы $K(\Lambda^\top)_\mathbb{C} = \ker \ell_\mathbb{C}$.

Приведенная конструкция квазиторического многообразия $M(P,\Lambda)$ отличается от конструкции Дэвиса и Янушкевича и является топологическим аналогом конструкции В. В. Батырева.
Она была предложена в работе В. М. Бухштабера, Т. Е. Панова и N. Ray.

Свойства квазиторических многообразий

Следующие результаты существенно используют нашу конструкцию квазиторических многообразий.

Теорема. Комбинаторные данные (P, Λ) задают каноническую T^n-инвариантную стабильно комплексную структуру на многообразии $M(P, \Lambda)$.

Каноническая T^n-инвариантная стабильно комплексная структура на $M(P, \Lambda)$ позволяет для каждой неподвижной точки x ввести знак $\sigma(x)$ (см. ниже), причем, если T^n-инвариантная структура является почти комплексной, то $\sigma(x) = 1$ для всех неподвижных точек.

Рассмотрим проекцию $\pi\colon M(P, \Lambda) \to P$.
Множество гиперграней $\{F_1, \ldots, F_m\}$ многогранника P определяет множество взаимно транверсальных подмногообразий $M_j = \pi^{-1}(F_j)$, $j = 1, \ldots, m$, коразмерности 2 в $M(P, \Lambda)$.

Пусть $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n}$ – вершина многогранника P. Тогда $x = \pi^{-1}(v) = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ – неподвижная точка T^n-действия α на $M(P, \Lambda)$. Имеем взаимно однозначное соответствие между множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_N\}$ и множеством неподвижных точек $\{x_1, \ldots, x_N\}$ действия α.

Касательное пространство τ_x к $M = M(P, \Lambda)$ в неподвижной точке x как $2n$-мерное вещественное пространство разлагается в сумму

$$\tau_x\big(M(P, \Lambda)\big) = \nu_{j_1}\big|_x \oplus \ldots \oplus \nu_{j_n}\big|_x,$$

где $\nu_j \to M_j$ – нормальное расслоение к подмногообразию M_j в M.

В терминах пары (P, Λ) задается структура комплексного одномерного расслоения в ν_j для каждого $j = 1, \ldots, m$.

Лемма. Пусть $x = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ – неподвижная точка.

1. $\sigma(x) = 1$, если ориентация пространства $\tau_x(M)$, задаваемая стабильно комплексной структурой в M, совпадает с ориентацией расслоения $\nu_{j_1}|_x \oplus \ldots \oplus \nu_{j_n}|_x$, определенного ориентациями расслоений ν_{jk}, $k = 1, \ldots, m$, и $\sigma(x) = -1$ в противном случае.

2. $\sigma(x) = \operatorname{sign}(\det(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}) \det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}))$.

А. А. Кустарев (2009) показал, что каноническая T^n-инвариантная стабильно комплексная структура на $M(P, \Lambda)$ эквивалентна T^n-инвариантной почти комплексной структуре тогда и только тогда, когда $\sigma(x) = 1$ для любой неподвижной точки.

Пусть M^{2n} – гладкое многообразие, обладающее вложением $M^{2n} \subset \mathbb{R}^{2(k+n)}$ с комплексным нормальным расслоением $\nu \to M^{2n}$. Тогда определены числа Чженя $c_\omega(M^{2n}),\ \omega = (i_1, \ldots, i_q),\ i_1 + \ldots + i_q = n$.

Теорема. (В.М.Бухштабер, Н.Рэй, Т.Е.Панов, 2007) При $n > 2$ существует квазиторическое многообразие $M^{2n}(P, \varLambda)$ с теми же числами Чженя.

Получены явные формулы, выражающие числа Чженя квазиторического многообразия $M(P, \varLambda)$ в терминах комбинаторных данных $(P, \varLambda)$.

Напомним, что вопрос Ф. Хирцебруха (1958):
"Когда набор чисел Чженя $\{c_\omega(M^{2n})\}$ является набором чисел Чженя связного алгебраического многообразия?"
остается пока нерешенным.

Гамильтоновы торические многообразия

Пусть $\mathfrak{G}(T^n) = \mathbb{R}^n$ – алгебра Ли тора T^n.

Гамильтоновым T^n-многообразием называется тройка $(M^{2n}, \omega, \mathscr{H})$, где (M^{2n}, ω) – симплектическое многообразие и $\mathscr{H} : M^{2n} \to \mathfrak{G}(T^n)^*$ – отображение моментов.

Гамильтоновым торическим многообразием называется компактное связное гамильтоново T^n-многообразие $(M^{2n}, \omega, \mathscr{H})$ с эффективным действием тора T^n.

Пусть P^n выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^N$ и $\{F_1, \ldots, F_m\}$ набор его гиперграней. Рассмотрим выпуклую оболочку $L(P)$ многогранника $P \subset \mathbb{R}^N$.
Выберем в $L(P)$ базис $A = \{a_i\}$ и зададим в $L(P)$ скалярное произведение и A-координаты условием, что базис A ортонормален.

Определение. Многогранник $P^n \subset \mathbb{R}^N$ называется *многогранником Дельзанта*, если в $L(P)$ существует такой базис A, что для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} \in P$ существуют A-целочисленные вектора $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$, образующие базис в группе $\mathbb{Z}^n$ всех A-целочисленных векторов, где ξ_{i_k} параллелен нормали к гиперплоскости F_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема. (Delzant, 1988) Существует взаимно однозначное соответствие между многогранниками Дельзанта и гамильтоновыми торическими многообразиями.

Рассмотрим $\mathbb{C}^m$ как симплектическое многообразие с симплектической формой

$$\omega = 2\sum_{k=1}^{m} dx_k \wedge dy_k, \text{ где } x_k + \sqrt{-1}y_k = z_k.$$

Стандартное действие тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$ является гамильтоновым с отображением моментов

$$\mathscr{H}\colon \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathbb{T}^m)^* \simeq \mathbb{R}^m \ : \qquad \mathscr{H}(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2).$$

Пусть

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (A_P x + b)_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

многогранник Дельзанта. Тогда матрица $\Lambda = A^\top$ задает характеристическое отображение

$$\ell\colon \{F_1, \dots, F_m\} \longrightarrow \mathbb{Z}^n.$$

Теорема. Квазиторическое многообразие $M(P, A^\top) = \mathscr{Z}_P / K(A^\top)$, где $\mathscr{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ и $K(A^\top) \subset \mathbb{T}^m$, является гамильтоновым торическим многообразием, полученным как симплектическая редукция действия тора $K(A^\top)$ на $\mathbb{C}^m$.

Производящие множества и простые графы

Совокупность $\mathscr{B}$ непустых подмножеств в $[n+1]=\{1,\ldots,n+1\}$ называется производящим множеством на $[n+1]$, если:

(1) $S', S'' \in \mathscr{B}$ и $S' \cap S'' \neq \varnothing \implies S' \cup S'' \in \mathscr{B}$;

(2) $\{i\} \in \mathscr{B}$ для всех $i \in [n+1]$.

Производящее множество $\mathscr{B}$ на $[n+1]$ называется связным, если $[n+1] \in \mathscr{B}$.
Для $S \subset [n+1]$ положим $\mathscr{B}|_S = \{S' \in \mathscr{B};\ S' \subseteq S\}$.
Обозначим через $|S|$ число элементов в S.

Граф Γ называется простым, если он не имеет петель и кратных ребер.

Пусть Γ – простой связный граф с вершинами $1,\ldots,n+1$. Обозначим через $\mathscr{B}(\Gamma)$ совокупность непустых подмножеств $S \subset [n+1]$ таких, что граф $\Gamma|_S$ является связным. Ясно, что $\mathscr{B}(\Gamma)$ является производящим множеством на $[n+1]$.

Нестоэдры и граф-ассоциэдры

Пусть $\mathscr{B}$ – производящее множество на $[n+1]$.

Положим $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = |\mathscr{B}|\}$.

Нестоэдром называется полиэдр

$$P_{\mathscr{B}} = \{x \in H \; : \; \sum_{i \in S} x_i - |\mathscr{B}|_S| \geqslant 0\},$$

где S пробегает все элементы из $\mathscr{B} \setminus [n+1]$.

Пусть Γ простой связный граф.

Нестоэдр $P_{\mathscr{B}(\Gamma)}$ называется граф-ассоциэдром.

Используя результаты А. Зелевинского, А. Постникова, E.-M. Feichtner, B.Sturmfels, получаем:

Теорема. Для связного $\mathscr{B}$ нестоэдр $P_{\mathscr{B}}$ является простым n-мерным многогранником.

Возьмем в гиперплоскости H решетку $\mathbb{Z}^n$ с началом в точке $O = |\mathscr{B}|e_{n+1}$ и базисными векторами $w_k = (e_k - e_{n+1})$.

Теорема. Нестоэдр $P_{\mathscr{B}}$ относительно базиса $\{w_k\}$ в решетке $\mathbb{Z}^n \subset H$ является многогранником Дельзанта.

Пример. Пусть $\mathscr{B}_\Delta$ – связное производящее множество на $[n+1]$, состоящее из точек $\{i\}$, $1,\dots,n+1$ и всего множества $[n+1]$.

Положим $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = n+2\}$. Нестоэдр $\mathscr{B}_\Delta$ представляет собой симплекс

$$\{x \in H \ : \ x_i - 1 \geqslant 0, \ i = 1,\dots,n+1\}.$$

В гиперплоскости H возьмем начало координат O в точке $(n+2)e_{n+1}$. Тогда относительно базиса $w_k = (e_k - e_{n+1})$, $k = 1,\dots,n$, точка $x \in H$ запишется в виде $x = O + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k w_k$.

В этом базисе $P_{\mathscr{B}_\Delta}$ запишется в виде

$$P_{\mathscr{B}_\Delta} = \{x \in H \ : \ x_i - 1 \geqslant 0, \ i = 1,\dots,n, \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i + (n+1) \geqslant 0\},$$

Ассоциэдр As^n (многогранник Сташефа K_{n+2})

Пусть Γ – путь $\underset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{2}{\bullet} \;\cdots\; \underset{n}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{n+1}{\bullet}$

Производящее множество $\mathscr{B}(\Gamma)$ состоит из сегментов $[i,j],\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$. Следовательно,

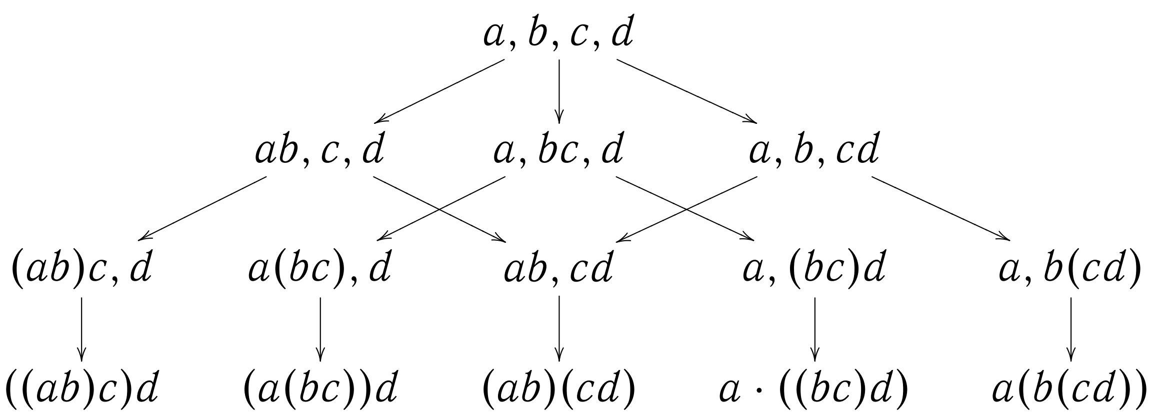
$$P_{\mathscr{B}(\Gamma)} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$
$$\sum_{k=i}^{j} x_k - \frac{1}{2}((j-i+1)(j-i+2)) \geqslant 0 \Big\},$$

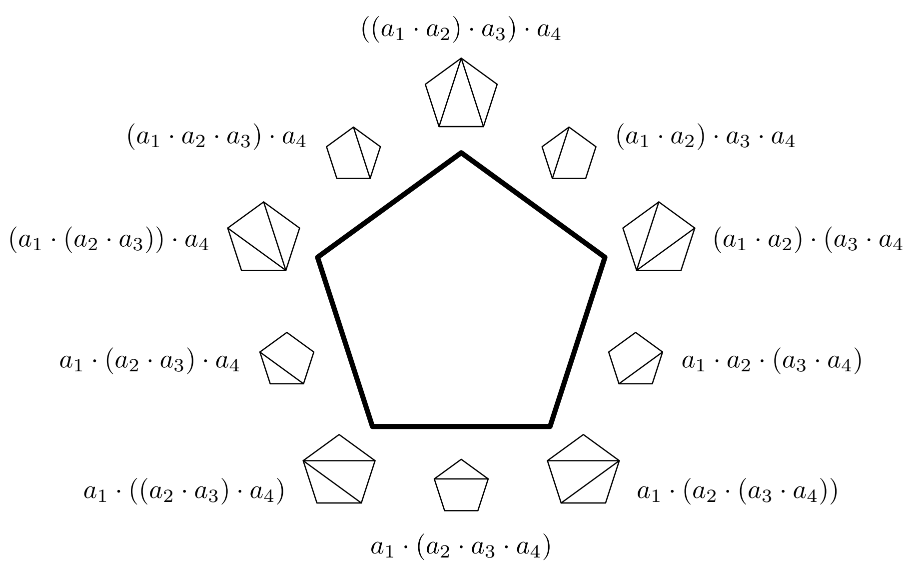
для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$.

Для описания частично упорядоченного множества граней многогранника As^n удобно использовать расстановку скобок в слове $a_1 a_2 \dots a_{n+2}$ из $(n+2)$ букв. Сопоставим сегменту $[i,j],\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ пару скобок: одна до a_i, другая после a_{j+1}. Каждый сегмент соответствует гиперграни. Две различные гиперграни пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие им 4 скобки дают правильную расстановку скобок в слове $a_1 a_2 \dots a_{n+2}$.

В результате получаем, что вершина многогранника As^n соответствует правильной расстановке n скобок в слове $a_1 a_2 \ldots a_{n+2}$, т.е. произведению символов $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ в неассоциативной алгебре.

Пример. $As^2 = K_4$.





Рассмотрим интервалы $[i, j]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, $j - i < 2$, и соответствующие им расстановки скобок в слове $a_1 a_2 a_3 a_4$:

$$[1] \to (a_1 a_2) a_3 a_4; \qquad [1, 2] \to (a_1 a_2 a_3) a_4;$$
$$[2] \to a_1 (a_2 a_3) a_4; \qquad [2, 3] \to a_1 (a_2 a_3 a_4);$$
$$[3] \to a_1 a_2 (a_3 a_4).$$

Используя порядок гиперграней

$$[1] < [3] < [2, 3] < [2] < [1, 2]$$

в базисе w_1, w_2 плоскости
$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 6\}$, получаем

$$As^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (Ax + b)_i \geqslant 0, \ \ i = 1, \ldots, 5\},$$

где

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^\top = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$