

ЗАСЕДАНИЕ 502 (23 июня 2023 г.)

А. В. Аксенов

Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без обрушения.

В безразмерных переменных система уравнений одномерной газовой динамики для политропных движений газа (давление задается соотношением $p = \gamma^{-1} \rho^\gamma$, $\gamma = \text{const}$) может быть записана в виде

$$u_t + uu_x + \rho^{\gamma-2} \rho_x = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0. \quad (1)$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии для системы уравнений (1) при $\gamma \neq 1$ запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u^2 \rho}{2} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \right) dx = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1) обладает на характеристиках C_+ и C_- инвариантами Римана

$$\begin{aligned} r &= u + \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, & C_+: \quad dx &= (u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt; \\ l &= u - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, & C_-: \quad dx &= (u - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt, \end{aligned}$$

которые представляют собой инварианты характеристик нулевого порядка.

Запишем исходную систему уравнений (1) в терминах инвариантов Римана

$$r_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x = 0, \quad l_t + \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x = 0. \quad (3)$$

Для определения инвариантов характеристик системы уравнений (1) удобно использовать операторы полных производных

$$D_x = \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots, \quad D_t = \partial_t + r_t \partial_r + l_t \partial_l + \dots.$$

Введём в рассмотрение операторы полных производных в силу системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} \bar{D}_x &= \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots, \\ \bar{D}_t &= \partial_t - \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x \partial_r - \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x \partial_l + \dots. \end{aligned}$$

Характеристика C_+ может быть описана в терминах полных производных вдоль характеристического направления

$$X_+ = \bar{D}_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} \bar{D}_x.$$

Определение. Назовём функцию f инвариантом характеристики C_+ , если она удовлетворяет условию

$$X_+(f) = 0. \quad (4)$$

Здесь f может зависеть от переменных t, x, r, l и производных по x вплоть до некоторого конечного порядка.

Аналогично определяются инварианты характеристики C_- .

Замечание 1. Система уравнений (3) инвариантна относительно преобразования

$$r \rightarrow l, \quad l \rightarrow r.$$

При этом $C_+ \rightarrow C_-$ и $C_- \rightarrow C_+$. Поэтому достаточно знать инварианты одной из характеристик.

Будем искать инварианты второго порядка характеристики C_+ , т.е. функции вида $f = f(t, x, r, l, r_x, l_x, r_{xx}, l_{xx})$, удовлетворяющие условию (4).

Показано, что существует только пять случаев существования дополнительных инвариантов характеристик не выше второго порядка.

Случай 1. $\gamma = -1$. В этом случае дополнительным инвариант

$$I_1 = \frac{2}{(l-r)r_x}.$$

Случай 2. $\gamma = 1/3$. В этом случае дополнительный инвариант

$$I_2 = \frac{r_{xx}(r-l) - 2r_x l_x}{(r-l)^3 r_x^3}.$$

Случай 3. $\gamma = 5/3$. В этом случае дополнительный инвариант

$$I_1 = x - rt + \frac{r-l}{2r_x}.$$

Случай 4. $\gamma = 7/5$. В этом случае дополнительный инвариант

$$I_2 = x - lt + (l-r) \frac{2l_x(4l_x - r_x) - (l-r)l_{xx}}{12l_x^3}.$$

Случай 5. $\gamma = 3$. В этом случае дополнительный инвариант

$$I_0 = x - rt.$$

Дополнительные инварианты характеристик позволяют свести решение задачи Коши к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого к системе уравнений (3) добавляется соотношение

$$I_- = h(l) \tag{5}$$

между инвариантом Римана l и её дополнительным инвариантом I_- . Соотношение (5) позволяет, используя начальные данные, определить соответствующую функцию $h(l)$. Интегрирование характеристического поля X_+ , рассматриваемого в силу переопределённой системы уравнений (3), (5), сводится к системе ОДУ.

В монографии [6] приводится критерий невозможности наступления градиентной катастрофы в задаче Коши для системы уравнений (3)

$$r'_0(x) \geq 0, \quad l'_0(x) \geq 0.$$

Для случаев 1–5 были рассмотрены две задачи Коши на всей пространственной оси.

$$\begin{aligned} (a): \quad r_0(x) &= \exp x + \exp(-x^2), \quad l_0(x) = \exp(x); \\ (b): \quad r_0(x) &= 2 \operatorname{arctg}(x) + \exp(-x^2), \quad l_0(x) = 2 \operatorname{arctg}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

В соответствующих решениях невозможно наступление градиентной катастрофы.

Замечание 2. Для задач Коши (6) выполнены законы сохранения (2).

Литература

1. *Riemann B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse. 1860. Band 8. Nr. 43. S. 43–66.
2. *Darboux M. G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 675–678.
3. *Darboux M. G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 746–749.
4. *Goursat M. E.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre a deux variables indépendantes. Tome II. Paris. 1898. 174 p.
5. *Канцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
6. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978.
7. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P., Kaptsov O. V.* Application of invariants of characteristics to construction of solutions without gradient catastrophe // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. V. 147. № 104249. P. 1–8.
8. *Аксенов А. В., Дружков К. П.* Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без градиентной катастрофы // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 1. С. 135–143.