On projections of a compact set in R^N

Olga Frolkina
M.V.Lomonosov Moscow State University
06 July 2023

III International Conference
“Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”
dedicated to the 100th anniversary of V.S. Vladimirov,
the 100th anniversary of L.D. Kudryavtsev,
and the 85th anniversary of O.G. Smolyanov
July 5–13, 2023, Moscow Region, Dolgoprudny

J. Cobb, 1994:

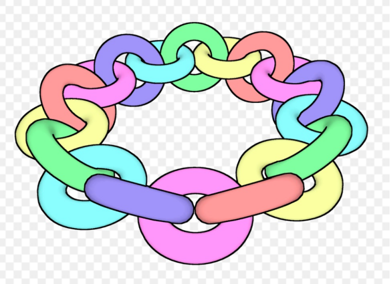
Даны (n, m, k), где $n > m > k > 0$.
Существует ли такое канторово множество в $\mathbb{R}^n$, проекция которого на любую m-плоскость имеет размерность k ?

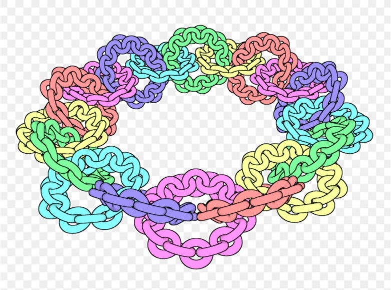
(n, m, k)-sets are known for the following cases:

$(2, 1, 1)$	L. Antoine	1924
	S. Mazurkiewicz & S. Saks	1926
	E. Otto, A. Flores, G. Nöbeling	1933
(n, m, m)	K. Borsuk	1947
$(3, 2, 1)$	J. Cobb	1994
	O. Frolkina	2021
$(n, m, m-1)$	O. Frolkina	2010
$(n, n-1, k)$	S. Barov & J.J. Dijkstra & M. van der Meer	2012
$(\infty, m, m-1)$	S. Barov & J.J. Dijkstra & M. van der Meer	2012
$(n, n-1, n-2)$	O. Frolkina	2020

Definition

Нульмерный компакт $K \subset \mathbb{R}^N$ называется ручным, если существует такой гомеоморфизм h пространства $\mathbb{R}^N$ на себя, что $h(K)$ содержится в прямой; иначе K называется диким.





Всякий нульмерный компакт на плоскости является ручным (Л.Антуан). Первые примеры диких канторовых множеств в $\mathbb{R}^3$ принадлежат Л. Антуану и П.С. Урысону (независимо).

Борсук описал такой узел в $\mathbb{R}^3$, ортогональная проекция которого на любую плоскость содержит круг. Анализ работы Борсука показывает, что такой узел существует в каждом классе эквивалентности узлов (как ручных, так и диких).

Definition

Подмножество пространства $\mathbb{R}^N$ называется полиэдром, если оно является объединением конечного набора симплексов. Компакт $X \subset \mathbb{R}^N$, гомеоморфный полиэдру, называется ручным, если существует такой гомеоморфизм h пространства $\mathbb{R}^N$ на себя, что $h(X)$ — полиэдр; в противном случае X называется диким.

Также Борсук построил более сильный пример — такую простую дугу $X \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, что проекция всякой ее поддуги на всякое подпространство $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ имеет размерность, равную $\dim \Pi$.

Пусть $N \geqslant 2$ — натуральное число, и $\varepsilon > 0$.

1) Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — ручное канторово множество. Тогда

a) существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(K)$, что $\dim p_\Pi(h_1(K)) = \dim \Pi$ для всякого линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$;

a') существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(K)$, что $\dim p_\Pi(h_1(A)) = \dim \Pi$ для всякого непустого открытого подмножества $A \subset K$ и всякого линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$;

b) существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(K)$, что для любого ненулевого линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ проекция $p_\Pi(h_1(K))$ на Π является канторовым множеством.

2) Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — произвольное канторово множество. Тогда существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(K)$, что $\dim p_\Pi(h_1(K)) = N - 2$ для всякой $(N-1)$-плоскости Π.

3) Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ — несчетный компакт. Существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(X)$, что $\dim p_\Pi(h_1(X)) = \dim \Pi$ для любого ненулевого линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$.

4) Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ — совершенный непустой компакт. Тогда существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(X)$, что $\dim p_\Pi(h_1(A)) = \dim \Pi$ для любого открытого подмножества $A \subset X$ и любого подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$.

5) Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ гомеоморфно окружности или отрезку. Тогда существует такая ε-изотопия $\{h_t\} : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(X)$, что $\dim p_\Pi(h_1(X)) = 1$ для любого ненулевого подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические компакты. Пространство непрерывных отображений $C(X, Y)$ с метрикой $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x))$ является полным.

(В случае $X = Y$ метрику обозначаем просто ρ.)
В работе будут рассматриваться следующие подпространства $C(X, X)$:

1) $\mathrm{Homeo}(X)$ — множество всех гомеоморфизмов $X \cong X$.

2) $\mathrm{Homeo}(X, A)$ — множество всех таких гомеоморфизмов $f : X \cong X$, что$f|_A = \mathrm{id}$.

3) $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(X, A)$, где $\varepsilon > 0$ — множество всех таких гомеоморфизмов $f : X \cong X$, что $f|_A = \mathrm{id}$ и $d(f, \mathrm{id}) < \varepsilon$.
При $\varepsilon > \mathrm{diam}\, X$ множества $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(X, A)$ и $\mathrm{Homeo}(X, A)$ совпадают.

Definition

Изотопией пространства Z называется такое непрерывное отображение $F = \{f_t\} : Z \times I \to Z$, что f_t является гомеоморфизмом при каждом $t \in I$ и $f_0 = \mathrm{id}$. (Как обычно, $f_t = F|_{Z \times \{t\}}$.)

Нам понадобятся пространства изотопий:
4) $\mathrm{Isot}(X)$ — множество всех изотопий пространства X. Метрика индуцирована из $C(X \times I, X)$, а именно, для $F, G \in \mathrm{Isot}(X)$ имеем

$$D(F, G) = \sup_{x \in X, t \in I} \rho(f_t(x), g_t(x)).$$

5) $\mathrm{Isot}(X, A)$ — множество всех таких изотопий $F : X \times I \to X$, что $f_t|_A = \mathrm{id}$ для любого $t \in I$.
6) $\mathrm{Isot}_\varepsilon(X, A)$, где $\varepsilon > 0$ — множество всех таких изотопий $F : X \times I \to X$, что$f_t|_A = \mathrm{id}$ для любого $t \in I$ и $D(F, \mathrm{Id}) < \varepsilon$.

Предложение

Пусть X — метрический компакт, $A \subset X$ — замкнутое подмножество, $\varepsilon > 0$.
1) Пространства $\mathrm{Homeo}(X)$, $\mathrm{Homeo}(X, A)$, $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(X, A)$ являются G_δ-подмножествами $C(X, X)$.
2) Пространства $\mathrm{Isot}(X)$, $\mathrm{Isot}(X, A)$, $\mathrm{Isot}_\varepsilon(X, A)$ являются G_δ-подмножествами $C(X \times I, X)$.

Definition

(Р. Бэр, 1899) Пусть X — непустое топологическое пространство. Подмножество $A \subset X$ имеет первую категорию в X, если существует представление $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i нигде не плотно в X; иначе A имеет вторую категорию в X. Подмножество $A \subset X$ остаточно в X, если его дополнение $X - A$ имеет первую категорию в X.

Чтобы это определение имело смысл, ограничиваются рассмотрением *бэровских* пространств (т.е. таких, в которых всякое непустое открытое его подмножество имеет вторую категорию в X; эквивалентно, всякое остаточное подмножество плотно в X.)
Пространство, метризуемое полной метрикой, является бэровским (Р. Бэр для $\mathbb{R}$, 1899; Ф. Хаусдорф, 1914). G_δ-подмножество пространства, метризуемого полной метрикой, также можно метризовать полной метрикой.

Definition

Пусть X — непустое бэровское пространство, $P \subset X$. Скажем, что типичный элемент пространства X принадлежит P, если множество элементов X, не принадлежащих P, имеет первую категорию.

Теорема (Szpilrajn 1937)

Если $m_{k+1}(X) = 0$, *где* $0 \leqslant k < \infty$, *то* $\dim X \leqslant k$.

М.А.Штанько $\dim X \leqslant \operatorname{dem} X$

Теорема (Luukkainen–Väisälä 1977)

Если X *— компакт в* R^n *и для целого* $k \geqslant 0$ *имеем* $m_{k+1}(X) = 0$, *то* $\operatorname{dem} X \leqslant k$.

Теорема (Väisälä 1979)

Если X *— компакт в* R^n, *то* $\operatorname{dem} X \leqslant \dim_H(f(X))$ *для всякого гомеоморфизма* $f : R^n \cong R^n$.
Далее, существует такой гомеоморфизм $f : R^n \cong R^n$, *что* $\operatorname{dem} X = \dim_H(f(X))$.

Theorem

Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ *— компакт,* U *— его ограниченная открытая окрестность, и* $\varepsilon > 0$. *Тогда*
a) типичный элемент f *пространства* $\mathrm{Homeo}_\varepsilon(\overline{U}, \partial U)$
обладает свойством

$$\operatorname{dem} X = \dim_H(f(X)),$$

b) типичный элемент F *пространства* $\mathrm{Isot}_\varepsilon(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством*

$$\operatorname{dem} X = \dim_H(f_1(X)).$$

Отсюда сразу получается теорема Ю. Вяйсяля (1979):

Corollary

Для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^N$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* ε*-изотопия* F *пространства* $\mathbb{R}^N$ *с носителем в* $O_\varepsilon X$, *что* $\operatorname{dem} X = \dim_H(f_1(X))$.

Corollary

Пусть $\Sigma \subset \operatorname{Int} B \subset \mathbb{R}^3$ *— произвольный узел, где B — замкнутый шар. Тогда*
a) для типичного гомеоморфизма $f \in \mathrm{Homeo}(B, \partial B)$ *проекция узла* $f(\Sigma)$ *на любую* 2*-плоскость является одномерной;*
b) для типичной изотопии $F \in \mathrm{Homeo}(B, \partial B)$ *проекция узла* $f_1(\Sigma)$ *на любую* 2*-плоскость является одномерной.*

Corollary

Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ *— канторово множество,* $N \geqslant 2$, U *— его ограниченная открытая окрестность, причем пересечение всякой ее компоненты связности с* K *непусто. Следующие условия эквивалентны:*
(i) K *— ручное;*
(ii) существует гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ *со свойством:* $\dim P_\Pi(f(K)) = 0$ *для некоторого собственного подпространства* $\Pi \subset \mathbb{R}^N$*;*
(iii) типичный гомеоморфизм $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством:*

$$\dim P_\Pi(f(K)) = \dim_H P_\Pi(f(K)) = 0$$

для любого подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$*;*
(iv) типичная изотопия $F \in \mathrm{Isot}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством:*

$$\dim P_\Pi(f_1(K)) = \dim_H P_\Pi(f_1(K)) = 0$$

для любого подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^N$*;*
(v) типичный гомеоморфизм $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством: проекция множества* $f(K)$ *на любое ненулевое подпространство является канторовым множеством.*

Corollary

Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ *— канторово множество,* $N \geqslant 3$*. Пусть* U *— ограниченная открытая окрестность множества* K*, причем пересечение всякой ее компоненты связности с* K *непусто. С.у.э.:*

(i) K *— дикое;*

(ii) всякий гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ *обладает свойством:*
$\dim P_\Pi(f(K)) > 0$ *для любого собственного подпространства* $\Pi \subset \mathbb{R}^N$*;*

(iii) всякий гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ *обладает свойством:*
$\dim P_\Pi(f(K)) = 1$ *для всякой прямой* Π*.*

(iv) всякий гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ *обладает свойством:*

$$\dim P_\Pi(f(K)) \in \{\dim \Pi, \dim \Pi - 1\}$$

для всякого собственного подпространства Π*.*

(v) типичный гомеоморфизм $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством:*

$$\dim P_\Pi(f(K)) = \dim_H P_\Pi(f(K)) = N - 2$$

для всякого подпространства Π *размерности* $\dim \Pi = N - 1$*;*

Corollary

(vi) типичный гомеоморфизм $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством:*

$$\dim_H P_\Pi(f(K)) = k$$

для всякого $k \in \{1, \ldots, N-2\}$ *и для почти всех (в смысле меры Лебега)* k*-мерных подпространств* $\Pi \in G(N, k)$.

(vii) типичная изотопия $F \in \mathrm{Isot}(\overline{U}, \partial U)$ *обладает свойством:*

$$\dim P_\Pi(f_1(K)) = \dim_H P_\Pi(f_1(K)) = N - 2$$

для любого $(N-1)$*-мерного подпространства* $\Pi \subset \mathbb{R}^N$.