III Международная конференция «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ», посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова

Московская область, г.Долгопрудный, 5-13 июля 2023

Задача разрешимости эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями в весовых пространствах

Тасевич Алла Львовна
РУДН, ФИЦ ИУ РАН
(tasevich-al@rudn.ru)

RUDN university

НАУКА И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

22 31 десятилетие науки и технологий

Федеральный исследовательский центр
Информатика и Управление
Российской академии наук

Применения эллиптических ФДУ

- Эллиптические уравнения с нелокальными граничными условиями [A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii, Soviet Math. Dokl. (1969)]
- Теория многослойных пластин и оболочек [G.G. Onanov, A.L. Skubachevskii, Soviet Appl. Mech. (1979)]
- Нелинейные оптические системы с обратной связью [M.A. Vorontsov, N.G. Iroshnikov, and R.L. Abernathy. Chaos, Solitons, and Fractals (1994)]
- Многомерные диффузионные процессы [A.L. Skubachevskii, Russ. J. of Math. Physics (1995)]
- Проблема Т.Като о квадратном корне из оператора

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}({\mathcal{A}^*}^{1/2})?$$

[T. Kato, J. Math. Soc. Japan. (1961)]

Различные типы пространственных преобразований

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1 + h_1, x_2 + h_2);$

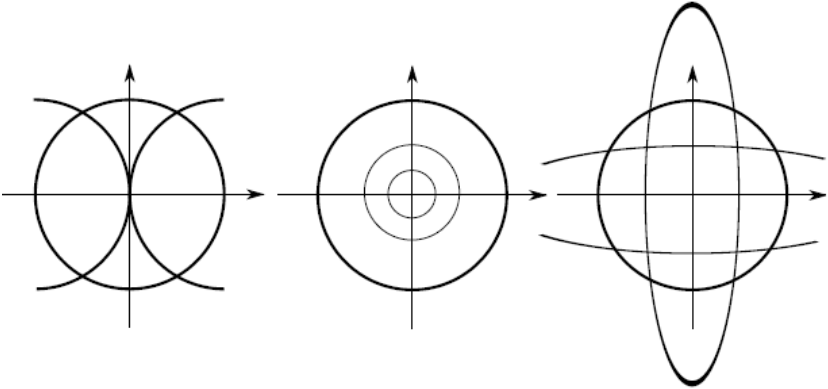
$(h_1, h_2) = (1, 0);$

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1/q, x_2/q);$

$q > 1;$

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1/q_1, x_2/q_2).$

$q_1 > 1, \; q_2 < 1.$



Различные типы пространственных преобразований

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1 + h_1, x_2 + h_2);$

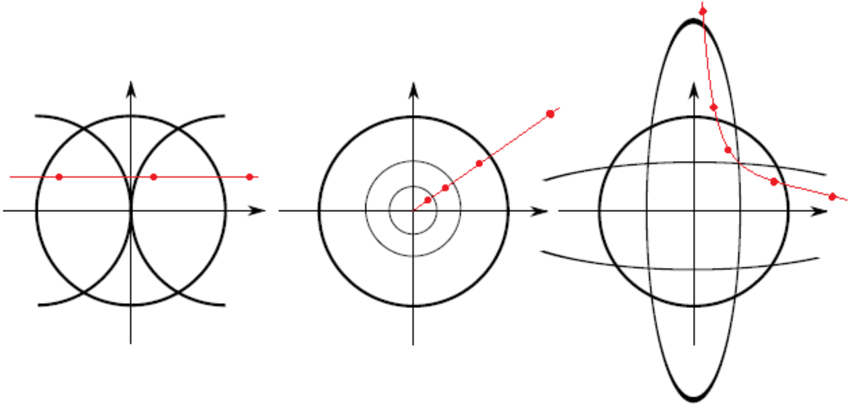
$(h_1, h_2) = (1, 0);$

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1/q, x_2/q);$

$q > 1;$

$u(x_1, x_2) \to$
$u(x_1/q_1, x_2/q_2).$

$q_1 > 1, \ q_2 < 1.$



Операторы ортотропного сжатия

Зафиксируем $p, q > 1$ и рассмотрим ограниченный оператор $P : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$Pu(x_1, x_2) = u\left(\frac{x_1}{q}, px_2\right).$$

Обратный и сопряженный к нему имеют вид

$$P^{-1}u(x_1, x_2) = u\left(qx_1, \frac{x_2}{p}\right), \; P^*u(x_1, x_2) = \frac{q}{p}P^{-1}u(x_1, x_2).$$

Отсюда оператор $\sqrt{\frac{p}{q}}P$ является унитарным, а оператор P — нормальным, т.е. $PP^* = P^*P$.

Лемма 1

Спектр оператора P совпадает с окружностью

$$\sigma(P) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{\frac{q}{p}}\right\}.$$

Орбита любой точки по действием P располагается на подобных гиперболам линиях $|x_1|^{\ln p}|x_2|^{\ln q} = const$.
При замене переменных

$$x_1 = \rho t^{s_1}, \quad x_2 = \rho t^{-s_2}, \qquad x_1 > 0,\ x_2 > 0,$$

$$\rho = \sqrt{x_1^{s_2} x_2^{s_1}}, \quad t = \sqrt{x_1/x_2}, \qquad \rho > 0,\ t > 0,$$

где

$$s_1 = \frac{2\ln q}{\ln pq}, \quad s_2 = \frac{2\ln p}{\ln pq} \quad (s_1 + s_2 = 2).$$

данная линия преобразуется в прямую $\rho = const$, и оператору P соответствует оператор сжатия только по одной переменной t.

$$u(q^{-1}x_1, px_2) = \hat{u}(\rho, (pq)^{-1/2} t).$$

$$u(x_1, x_2) = \hat{u}(\rho, t).$$

Согласно В.А. Кондратьеву [V.A. Kondratiev, Proceedings of MMS (1967)], весовым пространством $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, называется пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2(\beta - s + |\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Было показано в [B.A. Plamenevskii. Algebras of Pseudodifferential Operators. 1989], что пространство $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ может быть определено для всех $s \in \mathbb{R}$ и что преобразование Фурье однозначно продолжается до изоморфизма

$$F_{\beta - s} : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^\beta_s(\mathbb{R}^n), \qquad \beta - s \neq \pm(n/2 + k),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

- В.А. Кондратьев и др. Исследование эллиптических задач в областях с особенностями на границе
- Скубачевский А.Л. Дифференциально-разностные уравнения с особенностями на границе и внутри области
- Россовский Л.Е. ФДУ с изотропными сжатиями

$$\|v(\mathrm{x}) \mapsto v(q^{-1}\mathrm{x}); H^s_\beta(\mathbb{R}^n)\| = |q|^{(\beta - s + n/2)}.$$

Постановка задачи

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается ФДУ:

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(R_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x_1, x_2), \tag{2}$$

$$R_{ij}v(x_1,x_2) = a_{ij0}v(x_1,x_2) + a_{ij1}v\left(\frac{x_1}{q}, px_2\right) + a_{ij,-1}v\left(qx_1, \frac{x_2}{p}\right).$$

Здесь

- $a_{ijk} \in \mathbb{C}\ (k = 0, \pm 1;\ i, j = \overline{1,2})$;
- $p, q > 1$;
- $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$.

Применим преобразование Фурье и, учитывая то, что все функции, обращающиеся в нуль во всех четвертях, кроме одной, образуют инвариантное пространство относительно оператора ортотропного сжатия, получим уравнения

$$\left(a_{110}\tilde{u} + \frac{q^2 a_{111}}{p} P^{-1}\tilde{u} + \frac{p a_{11,-1}}{q^2} P\tilde{u}\right)\xi_1^2 \pm \tag{3}$$

$$\left((a_{120}+a_{210})\tilde{u} + \left(a_{121}q + \frac{a_{211}}{p}\right)\frac{q}{p}P^{-1}\tilde{u} + \left(\frac{a_{12,-1}}{q} + a_{21,-1}p\right)\frac{p}{q}P\tilde{u}\right)\xi_1\xi_2$$

$$+\left(a_{220}\tilde{u} + \frac{q a_{221}}{p^2}P^{-1}\tilde{u} + \frac{p^2 a_{22,-1}}{q}P\tilde{u}\right)\xi_2^2 = \tilde{f}.$$

Совершим вышеописанную замену переменных и логарифмическую замену переменных $t = e^{\tau}$ $(-\infty < \tau < +\infty)$. Тогда

$$\hat{u}(\rho, t) = w(\rho, \tau) = w(\rho, \ln t)$$

$$\hat{u}(\rho, (pq)^{-1/2} t) = w(\rho, \tau - \ln \sqrt{pq}),$$

Таким образом, оператор P переходит в оператор сдвига T по одной переменной $\tau \in \mathbb{R}$,

$$Tw(\rho, \tau) = w(\rho, \tau - h), \quad T^{-1} w(\rho, \tau) = w(\rho, \tau + h).$$

Здесь $h = \ln \sqrt{pq}$.

Определение 1

Обозначим через K^s множество измеримых функций в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$, для которых конечен интеграл

$$\|w\|^2_{K^s} := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} 2\rho^{2s+1} e^{\tau(s_1 - s_2)} \left(e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}\right)^s |w(\rho,\tau)|^2 d\rho d\tau. \quad (4)$$

Лемма 2

Уравнение (2) имеет единственное решение $u \in H_0^{s+2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ для любой функции $f \in H_0^s\left(\mathbb{R}^2\right)$, $s \notin \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда уравнение

$$\rho^2 \left(\alpha_0(\tau) w(\rho, \tau) + \alpha_{-1}(\tau) T^{-1} w(\rho, \tau) + \alpha_1(\tau) T w(\rho, \tau)\right) = g(\rho, \tau) \quad (5)$$

имеет единственное решение $w \in K^{s+2}$ для любой функции $g \in K^s$.

$$\alpha_{-1}(\tau) = \frac{q^2 a_{111}}{p} e^{2s_1\tau} \pm \left(a_{121} q + \frac{a_{211}}{p} \right) \frac{q}{p} e^{(s_1 - s_2)\tau} + \frac{q a_{221}}{p^2} e^{-2s_2\tau},$$

$$\alpha_0(\tau) = a_{110} e^{2s_1\tau} \pm (a_{120} + a_{210})\, e^{(s_1 - s_2)\tau} + a_{220} e^{-2s_2\tau},$$

$$\alpha_1(\tau) = \frac{p a_{11,-1}}{q^2} e^{2s_1\tau} \pm \left(\frac{a_{12,-1}}{q} + a_{21,-1} p \right) \frac{p}{q} e^{(s_1 - s_2)\tau} + \frac{p^2 a_{22,-1}}{q} e^{-2s_2\tau}$$

Для краткости обозначим через $e(\tau) = e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}$ и перепишем уравнение (5) следующим образом

$$\rho^2 e(\tau) T^{-1} \left[\gamma_0(\tau) I + \gamma_1(\tau) T^1 + \gamma_2(\tau) T^2 \right] \left(e^{\tau(s_1 - s_2)/2} \left(e(\tau) \right)^{s/2} w(\rho, \tau) \right)$$
$$= \left(e^{\tau(s_1 - s_2)/2} \left(e(\tau) \right)^{s/2} g(\rho, \tau) \right),$$

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\alpha_{-1}(\tau - h)}{e(\tau - h)}, \quad \gamma_1(\tau) = \frac{\alpha_0(\tau - h)\sqrt{q/p}\, e^{s/2}(\tau)}{e^{s/2+1}(\tau - h)},$$

$$\gamma_2(\tau) = \frac{\alpha_1(\tau - h)(q/p) e^{s/2}(\tau)}{e(\tau - h) e^{s/2}(\tau - 2h)}.$$

Обратим внимание на то, что из принадлежности функций $w(\rho,\tau)$ и $g(\rho,\tau)$ пространствам K^{s+2} и K^s, соответственно, следует, что для почти всех $\rho > 0$ функции $e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2}\,w(\rho,\tau)$ и $e^{\tau(s_1-s_2)/2}\,(e(\tau))^{s/2}\,g(\rho,\tau)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ как функции переменной τ.

Поскольку оператор $\rho^2 e(\tau)\,T^{-1}$ является изоморфизмом K^{s+2} на K^s и коэффициенты γ_i, $i = 0, 1, 2$, зависят только от τ, обратимость $B : K^{s+2} \to K^s$ равносильна обратимости

$$B_0 = \gamma_0 I + \gamma_1 T^1 + \gamma_2 T^2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}). \qquad (6)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты γ_i, $i = 0, 1, 2$, экспоненциально сходятся на бесконечности

$$\lim_{\tau \to +\infty} \gamma_0(\tau) = a_{111} \frac{q^2}{p}, \quad \lim_{\tau \to -\infty} \gamma_0(\tau) = a_{221} \frac{q}{p^2},$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \gamma_1(\tau) = a_{110} \sqrt{\frac{q}{p}} q^s, \quad \lim_{\tau \to -\infty} \gamma_1(\tau) = a_{220} \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-s},$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \gamma_2(\tau) = a_{11,-1} q^{2s-1}, \quad \lim_{\tau \to -\infty} \gamma_2(\tau) = a_{22,-1} p^{-2s+1}.$$

Для оператора B_0 зададим функцию

$$b_0(\tau,\lambda) := \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\tau)\lambda^j \quad (\tau \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Теорема 1

Если

$$b_0(\tau,0) \neq 0, \quad \tau \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

$$b_0(\pm\infty,\lambda) := \sum_{j=0}^{2} \gamma_j(\pm\infty)\lambda^j \neq 0 \quad (|\lambda| \leq 1),$$

то существует ограниченный обратный оператор $B_0^{-1} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство состоит из двух шагов.
1. Рассматривается сужение уравнения $B_0 v = z \in L_2(\mathbb{R})$ на интервале $I_- = (-\infty, N)$, где N произвольное. Конструируется обратный оператор с нормой, не зависящей от N.
2. После нахождения решения на I_- оно однозначно продолжается на интервал $I_+ = (N, +\infty)$. Таким образом полученная функция $v \in L_2(\mathbb{R})$ является решением уравнения на всей прямой.

Теорема 2

Пусть выполнено одно из следующих условий

$$a)\, a_{111}pqe^{2l_1\tau} \pm \left(a_{121}pq + a_{211}\right) e^{(l_1-l_2)\tau} + a_{221}e^{-2l_2\tau} \neq 0 \ (\tau \in \mathbb{R}),$$
$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{p/q}q^{s+1}\right),$$
$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{p/q}p^{-(s+1)}\right);$$

$$b)\, a_{11,-1}e^{2l_1\tau} \pm \left(a_{12,-1} + a_{21,-1}pq\right) e^{(l_1-l_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2l_2\tau} \neq 0 \ (\tau \in \mathbb{R}),$$
$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{p/q}q^{s+1}\right),$$
$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{p/q}p^{-(s+1)}\right).$$

Тогда существует единственное решение $u \in H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ *для любого* $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$.

Пример 1

$$a u_{x_1x_1}(x_1,x_2) + u_{x_1x_1}\left(\frac{x_1}{2}, 2x_2\right) + b u_{x_1x_2}\left(\frac{x_1}{2}, 2x_2\right) + u_{x_1x_1}\left(\frac{x_1}{2}, 2x_2\right) + c u_{x_2x_2}\left(2x_1, \frac{x_2}{2}\right) = f(x_1,x_2). \qquad (7)$$

Здесь $p = q = 2,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ f \in H_0^s(\mathbb{R}^2),\ s \notin \mathbb{Z}$. Тогда $a_{110} = a$, $a_{111} = 2$, $2a_{121} + a_{211}/2 = b$, $a_{221} = 1/2$, $a_{22,-1} = c/2$, остальные коэффициенты нулевые. Проверим условия теоремы

$$4e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2\tau} \neq \pm b, \quad \forall \tau \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{тогда} \quad |b| < 2.$$

$$2 + a\lambda = 0, \quad |\lambda| > 2^{s+1},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{c}{2}\lambda^2 = 0, \quad |\lambda| > 2^{-s-1}.$$

Это значит, что при $|a| < 2^{-s}$, $|c| < 2^{2(s+1)}$ и $|b| < 2$ уравнение (8) имеет единственное решение в $H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$.

Публикации

1. L. E. Rossovskii, A. L. Tasevich. *The first boundary-value problem for strongly elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions*. Math. Notes, Vol.97, No.5 (2015), 745–758.
2. A. L. Tasevich. *The smoothness of generalized solutions of Dirichlet's problem for strongly elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions*. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, Vol.58 (2015), 153–165.
3. L. E. Rossovskii, A. L. Tasevich. *On the solvability of functional-differential equations with orthotropic contractions in weighted spaces*. Differential Equations, Vol.53, No.12 (2017), 1631–1644.
4. A. L. Tasevich. *Analysis of functional-differential equation with orthotropic contractions*. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Vol.12, No.6 (2017), 240–248.

При финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (мегагрант 075-15-2022-1115).

Спасибо за внимание!