

Распределение вещественных полюсов уравнения P_{III}

В.Ю. Новокшенов

Институт математики
с ВЦ УФИЦ РАН



**III Международная конференция
«Математическая физика, динамические
системы, бесконечномерный анализ», 11
июля 2023**

Специальное уравнение Пенлеве III

PIII:
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + 4 \frac{(N-1)u^2 - N}{x} + 4u^3 - \frac{4}{u} \quad N = \text{const}$$

Приложения:

- Модель Гросса – Виттена – Вадьи о фазовом переходе на двумерной решетке
$$Z(x, N) = \int_{U(N)} \exp \left\{ \frac{1}{x} \text{Tr} (U + U^*) \right\} dU$$
- Вихри в эллиптическом уравнении синус-Гордон

$$\nabla^2 y + \frac{(\nabla y)^2 \bar{y}}{1 - |y|^2} + (1 - |y|^2) y = 0, \quad \nabla y = (y_x, y_y), \quad y(r, q) = u_N(r) e^{iNq}$$

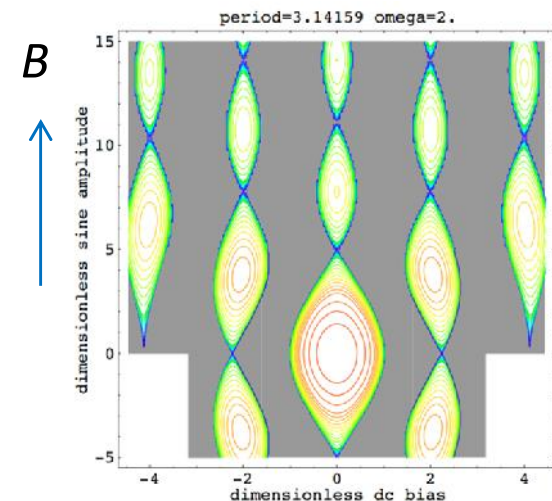
- Захват фазы в контакте Джозефсона *

$$\frac{dj}{dt} = -\sin j + B + A \cos \omega t$$

осциллирующие
моды j



полюсы PIII
с вычетами +1/2



* Y Bibilo and A A Glutsyuk, *Nonlinearity* **35** 5427 (2022)

Пусть имеется вещественный полюс $a > 0$ решения уравнения PIII

$$u(x) = -\frac{1}{2(x-a)} - \frac{2N-3}{4a} + b(x-a) + O(x-a)^2, \quad x \rightarrow a. \quad (*)$$

Тогда существует счетное число полюсов $0 < a < a_1 < a_2 < \dots$ вида $(*)$ на положительной полуоси.



В.И.Громак

Подтверждающий пример – «усеченное» уравнение PIII

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + 4u^3 - \frac{4}{u}$$

$$u(x) = -\frac{1}{2(x-a)} + \frac{1}{4a} + b(x-a) + O(x-a)^2, \quad x \rightarrow a,$$

Счетное число вещественных полюсов с асимптотикой

$$a_n = p \left(n - \frac{1}{2} \right) - \frac{c}{2} \ln 8p n + \frac{1}{2} \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + ic \right) + O \left(\frac{\ln n}{n} \right), \quad n \rightarrow +\infty$$

Преобразования Беклунда

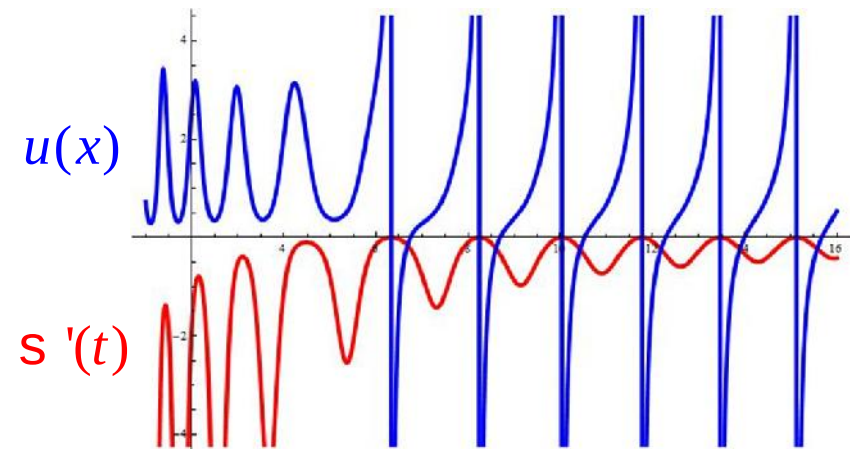
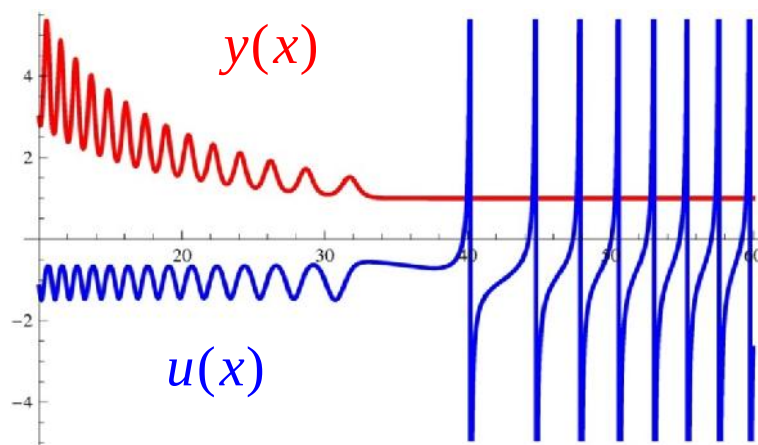
Пусть $y(x)$ и $s(t)$ удовлетворяют уравнению PV и сигма-уравнению sPIII, соотв.

$$\text{PV} \quad y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y} \right) (y')^2 - \frac{y'}{x} - 8y(y-1) + 2 \frac{N^2}{x^2} \frac{y-1}{y},$$

$$\text{sPIII} \quad (ts'')^2 = N^2 (s')^2 - 4s'(s'-1)(s-ts').$$

Тогда функции $u(x) = \frac{y'(x)}{4y(x)(y(x)-1)} - \frac{N}{2xy(x)}$ и $u(x) = \frac{ts'' + Ns'}{2\sqrt{t}s'(s'-1)}, \quad t = x^2$

являются решениями уравнения PIII



$$\text{PIII} \quad u'' = \frac{(u')^2}{u} - \frac{u'}{x} + 4 \frac{N-1}{x} u^2 - \frac{4N}{x} + 4u^3 - \frac{4}{u},$$

Асимптотика при $x > N/2$

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y} \right) (y')^2 - \frac{y'}{x} - 8y(y-1) + 2 \frac{N^2}{x^2} \frac{y-1}{y}, \quad y = 1 + o(1)$$

Асимптотический анзац: $y(x) = 1 + e v(x) + e^2 w(x) + \dots, \quad e \ll 1.$

$$v'' + \frac{v'}{x} + \left(8 - \frac{2N^2}{x^2} \right) v - \frac{(v')^2}{2v} = 0,$$



$$v(x) = [a J_N(2x) + b Y_N(2x)]^2$$

$$w'' + \frac{w'}{x} + \left(8 - \frac{2N^2}{x^2} \right) w + \frac{v'}{v} w' + \frac{v'^2}{2v} w = \frac{v'}{2} - \left(8 - \frac{2N^2}{x^2} \right) v^2,$$

...

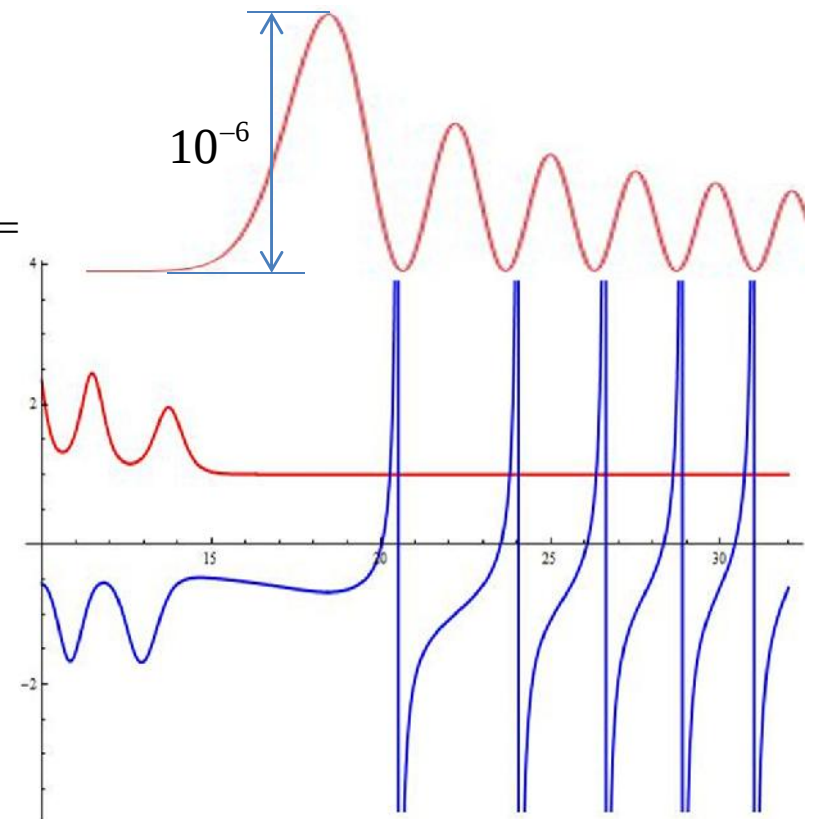
$$u(x) = \frac{y'(x)}{4y(x)(y(x)-1)} - \frac{N}{2xy(x)} = \frac{1}{2} \frac{a J'_N(2x) + b Y'_N(2x)}{a J_N(2x) + b Y_N(2x)} + O(e) =$$

$$= -\frac{1}{2(x-a)} - \frac{2N-3}{4a} + b(x-a) + \dots$$

Уравнения
на a и b

$$\begin{cases} a J_N(2a) + b Y_N(2a) = 0, \\ a J'_N(2a) + b Y'_N(2a) = B, \end{cases}$$

$$B = \frac{\sqrt{5 - 16a^2 + 24a^2b - 12N + 4N^2}}{a\sqrt{12}}.$$



Переходная область

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + 4 \frac{(N-1)u^2 - N}{x} + 4u^3 - \frac{4}{u}$$

$$x \approx N/2, \quad t = (N-2x)N^{-\frac{1}{3}},$$

$$u(x) = -1 + N^{-\frac{1}{3}} \frac{U'_t(t)}{U(t)} + O\left(N^{-\frac{2}{3}}\right),$$

где $U''(t) = tU(t) + 2U^3(t)$ - Пенлеве II

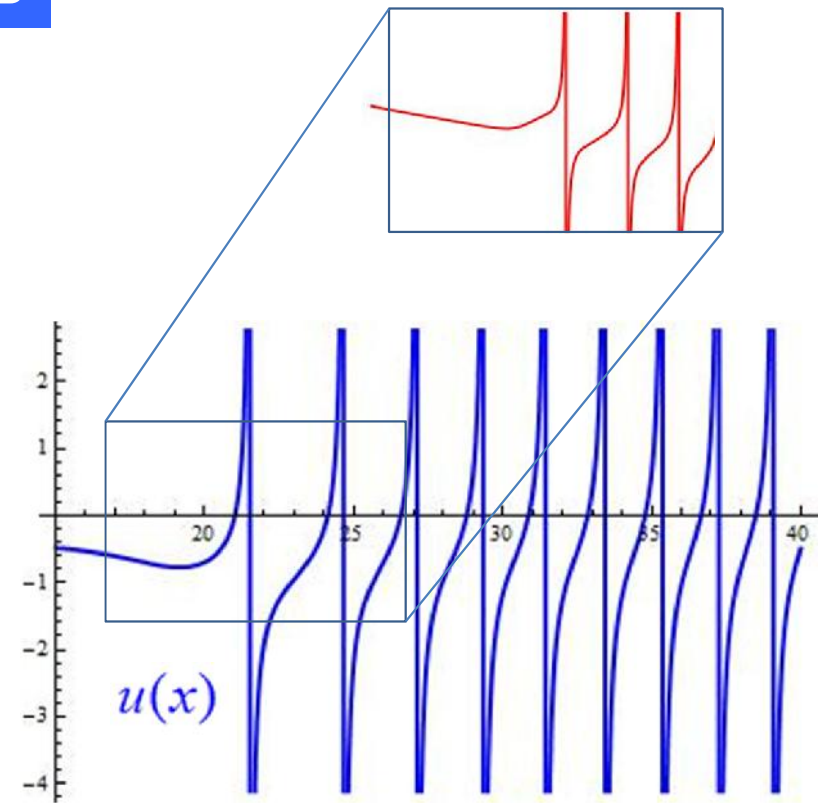
Решение Абловица-Сегюра

$$U(t) \approx \begin{cases} \frac{s}{2\sqrt{p}} (-t)^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}(-t)^{3/2}\right), & t \rightarrow -\infty \\ a(-t)^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + a^2 \log(-t) + b\right), & t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Формулы связи
асимптотик $U(t)$

$$a = \frac{1}{p} \ln(1 + |s|^2),$$

$$b = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{p}{4} - \arg \Gamma\left(\frac{ia}{2}\right) - \arg s$$



Модель Гросса-Виттена

Калибровочная модель фермионов на двумерной решетке $N \times N$

$$Z(x, N) = \int_{U(N)} \exp \left\{ \frac{1}{x} \text{Tr}(U + U^*) \right\} dU \quad - \text{ статсумма, где } U(N) - \text{ группа унитарных}$$

матриц, $1/x$ - константа связи, N - калибровочный параметр.

Фазовый переход при $N \approx 2x$, $N \rightarrow \infty$

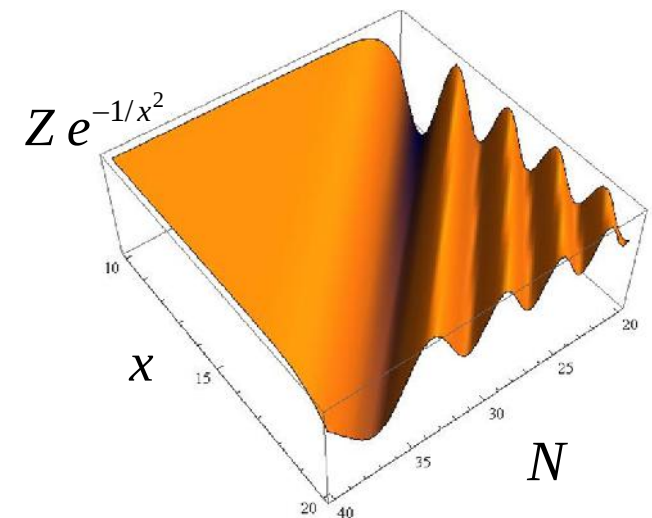
$$Z(x, N) = \det \left[I_{i-j} \left(\frac{2}{x} \right) \right]_{i,j=1}^N \rightarrow \exp \left(\frac{1}{x} \right)^2, \quad N \rightarrow \infty$$

Положим $y(x) = \frac{Z(x, N-1) Z(x, N+1)}{Z^2(x, N)}$, $y(x)$ - решение PV, $y(x) = 1 + o(1)$.

Тогда $y(x) = 1 + e J_N^2(2x) + O(e^2)$

Формулы Никольсона при $N \approx 2x$,

$$J_N(2x) = \begin{cases} c_1 \cos \left(\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} (2x - N)^{\frac{3}{2}} \right), & 2x > N, \\ c_2 \exp \left(-\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} |2x - N|^{\frac{3}{2}} \right), & 2x < N. \end{cases}$$



Сигма-уравнение

sPIII

$$(ts'')^2 = N^2(s')^2 - 4s'(s'-1)(s-ts'),$$

$$s' = \frac{ds}{dt}$$

$$u(x) = \frac{ts'' + Ns'}{2\sqrt{t}s'(s'-1)}, \quad t = x^2$$

Теорема. Пусть при $t = a > 0$ заданы начальные условия sPIII $s(a) < 0$, $s'(a) = 0$, тогда существуют $a < a_1 < \dots < a_n < \dots$, такие что $s(a_n) < 0$, $s'(a_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Положим $s' = -s^2(t)$, $t = x^2$, тогда sPIII примет вид

$$\begin{cases} (s'_x)^2 = \frac{N^2 s^2}{x^2} - 4(s^2 + 1) \left(\frac{s}{x^2} + s^2 \right), \\ s'_x = -2x s^2. \end{cases}$$

$s(x)$ - ограничено, тогда $s = -2 \int_0^x x s^2(x) dx = O(-x^2)$, $x \gg 1$

Пусть $s_+(x) > 0$, $s_-(x) < 0$ - корни полинома

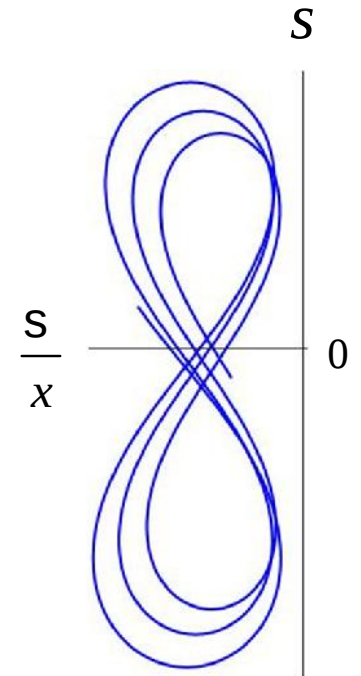
$$P(s) = -4(s^2 - s_-(x))(s^2 - s_+(x)) = \frac{N^2 s^2}{x^2} - 4(s^2 + 1) \left(\frac{s}{x^2} + s^2 \right),$$

тогда $s_-(x) \leq s^2(x) \leq s_+(x)$,

При $x \gg 1$ функция Якоби

$$x = - \int_{s_-}^s \frac{ds}{4\sqrt{(s^2 - s_-)(s^2 - s_+)}}$$

периодическая.



Распределение полюсов в правой полуплоскости

$$u(z) = \pm \frac{1}{2(z-a)} - \frac{2(N-1) \pm 1}{4a} + b(z-a) + O(z-a)^2, \quad z \rightarrow a.$$

