Бифуркации коразмерности 2 нелинейных гибридных динамических систем с постоянным шагом дискретизации

Акманова Светлана Владимировна,

доцент, к.п.н., доцент каф. прикладной математики и информатики Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова

Общая постановка задачи

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k), \mu), \ t_k \le t < \ t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), \mu), k = 0,1,2, \dots, \end{cases} \qquad (*)$$

где $x \in R^n, y \in R^m, t \in [t_k, t_{k+1}), \ \mu \in R^1$ $h > 0$ – шаг сетки

$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \cdots < t_{k+1} = t_k + h < \cdots$

функции $f(x, y, \mu), g(x, y, \mu)$ непрерывно дифференцируемы

по x, y и μ

$f(0,0,\mu_0) = g(0,0,\mu_0) = 0 \to \ x^* = y^* = 0$ – точка равновесия системы $(*)$

Установить *достаточные признаки существования бифуркаций коразмерности* 2 *в окрестности точки* $x^* = y^* = 0$ *системы* $(*)$.

Постановка задачи

Пусть дана нелинейная гибридная система (НДС)

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(\mu)x(t) + b_1(\mu)y(t_k) + a(x(t), y(t_k), \mu), \\ y(t_{k+1}) = a_2(\mu)x(t_{k+1}) + b_2(\mu)y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k), \mu), \end{cases} \qquad (1)$$

где $x, y \in R^1, t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0,1,2, \dots, \mu \in R^1,$ $h > 0$ – шаг сетки

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \cdots < t_{k+1} = t_k + h < \cdots$$

$$|a(x, y, \mu)| = o(|x| + |y|), |b(x, y, \mu)| = o(|x| + |y|)$$

при $|x| + |y| \to 0$, равномерно по μ,

$a_i(\mu), b_i(\mu)$ – дифференцируемы по μ $(i = 1,2)$,

при $\mu = \mu_0$ система (1) имеет точку равновесия $x^* = y^* = 0$.

Установить :
достаточные признаки существования точек бифуркации (локальных бифуркаций) коразмерности 2 системы (1), $\boldsymbol{\mu}$, h – параметры для (1)

Равносильная ДДС

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{a_1(\mu)h}x_k + \dfrac{b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right)y_k + \varepsilon(x_k, y_k, \mu; h), \\ y_{k+1} = a_2(\mu)e^{a_1(\mu)h}x_k + \left(\dfrac{a_2(\mu)b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right) + b_2(\mu)\right)y_k + c(x_k, y_k, \mu; h), \end{cases} \quad (2)$$

где $x_k = x(t_k), y_k = y(t_k)$.

$$\varepsilon(x_k, y_k, \mu; h) = e^{(t_k+h)a_1(\mu)} \int_{tk}^{t_k+h} e^{-sa_1(\mu)}a(x(s, x_k, y_k, \mu), y_k, \mu)ds,$$

$x = x(t, x_k, y_k, \mu)$ – решение задачи Коши

$$x' = a_1(\mu)x + b_1(\mu)y_k + a(x, y_k, \mu), \qquad x(t_k) = x_k, \qquad (3)$$

$$c(x_k, y_k, \mu; h) = a_2(\mu)\varepsilon(x_k, y_k, \mu; h) + b(x_{k+1}, y_k, \mu)$$

Равносильность систем (1) и (2)

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(\mu)x(t) + b_1(\mu)y(t_k) + a(x(t), y(t_k), \mu), \\ y(t_{k+1}) = a_2(\mu)x(t_{k+1}) + b_2(\mu)y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k), \mu), \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{a_1(\mu)h}x_k + \dfrac{b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right)y_k + \varepsilon(x_k, y_k, \mu; h), \\ y_{k+1} = a_2(\mu)e^{a_1(\mu)h}x_k + \left(\dfrac{a_2(\mu)b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right) + b_2(\mu)\right)y_k + c(x_k, y_k, \mu; h), \end{cases} \qquad (2)$$

при фиксированном μ:

–если $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), то (x_k, y_k) – решение системы (2), где $x_k = x(t_k)$;

–если (x_k, y_k) - решение системы (2), то $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), где x(t)– решение задачи Коши (3).

Связь решений систем (2) и (1)

При $\mu = \mu^*$ справедливы утверждения

Теорема 1. *Пусть $n = 1$. Тогда точка равновесия (x^*, y^*) ДДС (2) является и точкой равновесия исходной НДС (1).*

Теорема 2. *Пусть ДДС (2) имеет цикл периода q $(q \geqslant 2)$:*

$$\underbrace{(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \ldots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*)}, \underbrace{(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \ldots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*)}, \ldots,$$

Тогда НДС (1) имеет qh-периодическое решение $x = \varphi_0(t)$, $y = y_j^*$ $(j = 0, 1, \ldots, q-1)$ так что $\varphi_0(0) = x_0^*$, $\varphi_0(h) = x_1^*$, $\ldots$, $\varphi_0((q-1)h) = = x_{q-1}^*$.

Точка бифуркации системы (1)

$$u_{k+1} = A(\mu, h)u_k + \varphi(u_k, \mu; h), \qquad (4)$$

где

$$u_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \qquad \varphi(u_k, \mu; h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k, \mu; h) \\ \mathrm{c}(x_k, y_k, \mu; h) \end{bmatrix}$$

$$A(\mu, h) = \begin{bmatrix} e^{a_1(\mu)h} & \dfrac{b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right) \\ a_2(\mu)e^{a_1(\mu)h} & \dfrac{a_2(\mu)b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(e^{a_1(\mu)h} - 1\right) + b_2(\mu) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\|\varphi(u, \mu; h)\| = o(\|u\|) \text{ при } \|u\| \to 0, \text{равномерно по } \mu.$$

Df: $v_0 = \left(\mu_0, h_0\right) -$ точка бифуркации системы (1), если $A_0 = A(\mu_0, h_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, модуль которого равен 1.

Возможные элементы спектра матрицы A_0 (другие собственные значения не удовл. Df)

1) **1- простое собственное значение матрицы A_0;**
2) **-1- простое собственное значение матрицы A_0;**
3) ∓ 1- простые собственные значения матрицы A_0 ;
4) 1- неполупростое собственное значение матрицы A_0;
5) -1-неполупростое собственное значение матрицы A_0 ;
6) $e^{\mp i2\pi\theta}$ – **простые комплексно сопряжённые** собственные значения матрицы A_0, 0<θ<1-иррационально или $\theta = \dfrac{p}{q}$ - рациональная дробь, где q=3;4 или $q \geq 5$.

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(x(t), y(t_k)\big),\ t_k \leq t < \ t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g\big(x(t_{k+1}), y(t_k)\big), k = 0,1,2, \dots , \end{cases} \qquad (**)$$

$A_0 = A(\mu_0, h_0)$ имеет собственное значение 1,

$e \in R^2$ – соответствующий собственный вектор

Теорема 3. *Пусть* n=1, *и матрица* A_0 *имеет собственное значение 1, тогда для любого вектора* $g \in R^2$ *выполняется соотношение*

$$(A'_h(\mu_0, h_0)e, g) = 0.$$

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Пусть матрица $A_0 = A(\mu_0, h_0)$ имеет простое собственное знвчение 1, e и g - собственные векторы соответственно матрицы A_0 и сопряжённой матрицы A_0^*. $\|e\| = 1, (e, g) = 1$

Теорема 1. ***Если матрица A_0 имеет простое собственное значение 1 и при этом $\left(A'_\mu(\mu_0, h_0)e, g\right) \neq 0$, то значение $\upsilon_0 = \left(\mu_0, h_0\right)$ является точкой бифуркации кратного равновесия системы (1).***

<u>*Пример*</u>

$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) + (2\mu - 1)y(t_k), \\ y(t_{k+1}) = 2\mu x(t_{k+1}) - \mu y(t_k) + y^2(t_k), \end{cases}$$

$$\upsilon_0 = (0{,}2; ln3), \quad x = \frac{\varepsilon(3 - 10\varepsilon)}{\varepsilon + 0{,}2}, y = 5\varepsilon, (x, y) \to (0{,}0) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Пусть матрица $A_0 = A(\mu_0, h_0)$ имеет неполупростое собственное значение 1, кратности 2, e и g - собственный и присоединённый векторы матрицы A_0 , e^*, g^* - собственный и присоединённый векторы сопряжённой матрицы A_0^* ,

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 0, (e, g^*) = (g, e^*) = 1,$$

$$D = \begin{bmatrix} (A'_h(\mu_0, h_0)e, g^*) + 1 & \left(A'_\mu(\mu_0, h_0)e, g^*\right) \\ (A'_h(\mu_0, h_0)e, e^*) & \left(A'_\mu(\mu_0, h_0)e, e^*\right) \end{bmatrix}$$

Теорема 2. ***Пусть*** $a_2(\mu_0)b_1(\mu_0) = a_1(\mu_0)(b_2(\mu_0) - 1)$,

$h_0 = -\dfrac{1}{a_1(\mu_0)} ln b_2(\mu_0) > 0$, ***и*** $\det D \neq 0$, ***тогда значение***

$\upsilon_0 = (\mu_0, h_0)$ ***является точкой бифуркации кратного***

равновесия системы (1).

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Пусть матрица A_0 имеет неполупростое собственное значение -1 кратности 2, тогда матрица $A_0^2 = B\left(\mu_0, h_0\right) = B_0$ имеет неполупростое собственное значение 1 кратности 2, e, g и e^*, g^* - соответственно собственный и присоединённый векторы матрицы B_0 и сопряжённой матрицы B_0^*, отвечающие этому значению.

$$C = \begin{bmatrix} (B_h'(\mu_0, h_0)e, g^*) + 1 & \left(B_\mu'(\mu_0, h_0)e, g^*\right) \\ (B_h'(\mu_0, h_0)e, e^*) & \left(B_\mu'(\mu_0, h_0)e, e^*\right) \end{bmatrix}$$

Теорема 3. ***Пусть*** $\dfrac{a_2(\mu_0)b_1(\mu_0)}{a_1(\mu_0)} = \dfrac{(b_2(\mu_0)+1)^2}{b_2(\mu_0)-1}$, $h_0 = -\dfrac{1}{a_1(\mu_0)} \ln b_2(\mu_0) > 0$,

и $\det C \neq 0$,

тогда значение $\upsilon_0 = \left(\mu_0, h_0\right)$ ***является точкой бифуркации***

$2h$ – ***периодических решений системы*** (1), ***где*** $h \approx h_0$.

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Пусть матрица A_0 имеет простые собственные значения ∓ 1, тогда матрица $A_0^2 = B(\mu_0, h_0) = B_0$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, e, g и e^*, g^*- собственные векторы соответственно матрицы B_0 и сопряжённой матрицы B_0^*, отвечающие этому значению.

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, (e, g^*) = (g, e^*) = 0,$$

$$F = \begin{bmatrix} (B_h'(\mu_0, h_0)e, g^*) & (B_\mu'(\mu_0, h_0)e, g^*) \\ (B_h'(\mu_0, h_0)e, e^*) & (B_\mu'(\mu_0, h_0)e, e^*) \end{bmatrix}$$

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Теорема 4. ***Пусть*** $a_2(\mu_0)b_1(\mu_0) = a_1(\mu_0)(b_2(\mu_0) - 1),$

$h_0 = -\dfrac{1}{a_1(\mu_0)} ln(-b_2(\mu_0)) > 0,$ ***и*** $\det F \neq 0,$ ***тогда значение***

$\upsilon_0 = (\mu_0, h_0)$ ***является точкой бифуркации кратного равновесия и (или) точкой бифуркации***

$\boldsymbol{2h}$ ***– периодических решений системы*** (1)***, где*** $\boldsymbol{h \approx h_0}$.

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Характеристическое уравнение матрицы (5) имеет вид

$$\lambda^2 + a(\mu)\lambda + b(\mu) = 0,$$

где

$$a(\mu) = \frac{a_2(\mu) b_1(\mu)}{a_1(\mu)}\left(1 - e^{a_1(\mu)h}\right) - b_2(\mu) - e^{a_1(\mu)h},$$

$$b(\mu) = b_2(\mu) e^{a_1(\mu)h},$$

выясним, при каких условиях данное уравнение имеет корни

$e^{\mp i2\pi\theta}$, *где* $0 < \theta < 1, \theta = \frac{p}{q}, \; 1 < q \leq 4, \; q \neq 2.$

Достаточные признаки существования точек бифуркации коразмерности 2

Теорема 5. ***Пусть*** $|a(\mu)| < 2, b(\mu) = 1,$

$$h_0 = -\frac{1}{a_1(\mu_0)} ln b_2(\mu_0) > 0, \quad и\ \theta = \frac{p}{q} = \frac{arccos(-0,5a(\mu))}{2\pi},$$

причём $q = 3; 4,$ ***тогда значение*** $\upsilon_0 = (\mu_0, h_0)$

является точкой бифупкации qh ***– периодических***

решений системы (1), ***где*** $h \approx h_0$.

Литература

1) **Юмагулов М.Г., Акманова С.В. О качественных характеристиках точек равновесия и циклов непрерывно-дискретных систем // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвящённой памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2022. С.142-145.**

2) **Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейных динамике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 428 с.**

3) **Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. – СПб.: Изд-во «Лань», 2015. 272 с.**

4) **Вышинский А.А. Операторные методы численного исследования задач о бифуркациях в моделях популяционной динамики. Дисс. …канд. физ.-матем. наук. БГУ, Уфа, 2012.**

5) **Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод приближённого исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский матем. журнал. Т.2, №4, С.3-26, 2010.**

Спасибо за внимание!