

Полные функции распределения площади и периметра для плоских пуассоновских процессов прямой и диаграмм Вороного

А. Я. Канель-Белов*, М. Голафшан[†] С. Г. Малев[‡] Р. П. Явиц[§]

12 августа 2022 г.

Аннотация

Изучение случайных разбиений пространства составляет значительный класс проблем теории геометрических преобразований. Ричард Майлз рассчитал моменты площадей и периметров любого порядка (в том числе, математические ожидания) случайного деления пространства в 1972 году. В этой статье мы вычисляем полную функцию распределения случайных делений плоскости пуассоновским процессом прямой. Наша идея состоит в том, чтобы интерпретировать случайный многоугольник как эволюцию отрезка вдоль движения прямой. В примере с плоскостью проблема, связанная с бесконечным числом параметров, решается рассмотрением секущей.

Примем во внимание следующие задачи:

1. На плоскости задан случайный набор прямых, все сдвиги равновероятны, а закон распределения имеет вид $F(\varphi)$. Каково распределение площадей компонентов разбиения?
2. На плоскости отмечен случайный набор точек. С каждой точкой A связана область, представляющая собой набор точек на плоскости, к которым точка A является ближайшей из множества отмеченных.

*Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel

[†]Московский Физико-Технический Институт, Москва, Российская Федерация

[‡]Ariel University, Ariel, Israel

[§]Ariel University, Ariel, Israel

В первой задаче плотность перемещаемых участков, примыкающих к прямой, позволяет выразить коэффициент балансировки в кинетической форме. Точно так же можно написать кинетические уравнения периметров. В этой статье мы покажем, как свести эти уравнения к уравнению Риккати, используя преобразование Лапласа.

Фактически мы формулируем функцию распределения площади и периметра и их совместное распределение с пуассоновским процессом на основе дифференциальных уравнений. Также для диаграмм Вороного. Основные результаты представлены в теоремах 1, 2 и 3.

1 Введение

Статистическая (или стохастическая) геометрия – это междисциплинарная область между чистой и прикладной математикой. С другой стороны, из-за ее многочисленных приложений к другим отраслям можно назвать ее мультидисциплинарной. Среди ее наиболее важных применений присутствуют астрономия, телекоммуникации, анализ изображений и стереология. В своей кандидатской диссертации Алексей Канель-Белов занимался статистической геометрией и ее приложениями [1, 3].

Важным классом задач теории геометрических преобразований являются задачи изучения случайных разбиений пространства. Аналогичные задачи возникают из горного дела. В общем случае, как правило, удаётся найти только моменты случайных величин связанных с разбиением, возникающие здесь задачи очень сложны.

Рассмотрены многочисленные модели однородного случайного разбиения трехмерного пространства. Ричард Майлз рассуждал о разделении пространства случайными плоскостями, за которым последовала мозаика Вороного и двойная мозаика Делоне тетраэдра, обе образованы из случайных точек в пространстве [5]. Также в 1969 году он говорил что распределения типичного многоугольника и фундаментального многоугольника различаются: (i) распределение типичного многоугольника измеряется в числах; (ii) фундаментального многоугольника измеряется в площади [6].

Кроме того, возникают вопросы, связанные с обоснованием: здесь важную роль играет закон *нуля или единицы*: разбиение задаётся бесконечным набором случайных величин, все свойства, не зависящие от

значения конечного числа этих величин, выполнены с вероятностью 0 или 1. Такими свойствами, в частности, являются асимптотические. При обосновании большую помощь оказывает идея аппроксимации к случаю непрерывного распределения случаям n систем.

В плоском случае удаётся выразить распределение ряда величин, связанных со случайнм разбиением, через уравнение в частных производных, которое в некоторых случаях удаётся свести к уравнению Рикатти.

Причина этого состоит в том, что трудность, связанная с тем, что части разбиения имеют и описываются тем самым неограниченным числом параметров, в плоском случае преодолевается рассмотрением секущей прямой [2, 4]. Идея заключается в том, что случайное разбиение плоскости можно рассматривать как процесс на движущейся прямой. Выигрыш при таком подходе заключается в том, что сечением многоугольника является отрезок и для дальнейшей его “эволюции” важны только его длина, скорости левого и правого “концов”. (При изучении закона распределения систем, площадей или периметров, мы должны “помнить” ещё пройденную площадь (периметр)).

Для пространства идея движущейся секущей недостаточна: сечение многогранника может быть многоугольником с произвольным числом сторон, описываемым соответствующим числом параметров. Однако некоторые уравнения можно выписать. Отметим, что чем больше сторон у многогранника, тем реже он встречается, причём частота оценивается экспонентой от минус числа его граней.

Локальная независимость перемещения его концов может быть использована для упрощения уравнений (см. теорему 2 и раздел 4). В итоге мы пришли от распределения по сечениям к обычному распределению с использованием параметра t (проекция на прямую, перпендикулярная линии сечения L (см. теорему 3 и раздел 5.1).

В следующей статье мы предполагаем использовать аналогичные идеи для невыборной плоскости и сферы.

В последнем разделе будет обсуждаться обоснование.

1.1 Основные результаты

Эти результаты получены с помощью пуассоновского процесса. Здесь t — проекция многоугольника на перпендикуляр к прямой. В этой статье мы докажем следующие теоремы:

Теорема 1 *Функция распределения вдоль линий может быть представлена следующими кинетическими уравнениями:*

$$l \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} + \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \lambda N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left(\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Аналогично, кинетическое уравнение периметров:

$$\left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left(\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(P, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(P, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Пусть dF ожидание количества точек пересечения единичного отрезка нормального прямой с углом наклона φ с прямыми, чьи углы наклона между φ и $\varphi + d\varphi$. Определим функцию $F(\varphi)$ как предел $F(\varphi) = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{dF}{d\varphi}$.

Кинетические уравнения площадей могут быть выписаны следующим образом:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N (G_1(\alpha_1) + G_2(\alpha_2)) - F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - F(\alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi.$$

здесь

$$G_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} F(\varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} d\varphi \text{ и } G_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} F(\pi - \varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} d\varphi.$$

Теорема 2 Функция перехода $\alpha \xrightarrow{l,P} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow{l,S} \alpha'$ и $\alpha \xrightarrow{P,S,l} \alpha'$ может быть сформулирована следующим образом:

$$\left(l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,S} \alpha' = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,P} \alpha' = 0,$$

$$\left(l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,S} \alpha' = 0,$$

здесь

$$Q_1^F(\Re(*, *, l, \alpha, \alpha')) = \cot(\alpha) \cdot \frac{\partial \Re}{\partial l} + G_1(\alpha') \cdot \Re - F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \cdot \Re(*, *, l, \alpha, \varphi).$$

Распределение прямой в Теореме 1 может быть выражено следующим образом. Формула для распределения площади:

$$\mathcal{N}(S, t) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_5} \alpha_1^O \xrightarrow{l,1} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,2} \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dS_1 dS_2,$$

где \mathcal{D}_5 устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad S_1 + S_2 = S, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi.$$

Похожие формулы можно выписать про периметры:

$$\mathcal{N}(P, t) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_6} \alpha_1^O \xrightarrow{l,1} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,2} \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dP_1 dP_2$$

где \mathcal{D}_6 устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi$$

и для совместного распределения площади и периметра:

$$\mathcal{N}(S, P, t) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_7} \alpha_1^O \xrightarrow{l, S} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l, S} \alpha_2 \, dl_1 dP_1 dS_1 d\alpha_1^O d\alpha_2^O,$$

где \mathcal{D}_7 устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P, \quad S_1 + S_2 = S, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi,$$

Теорема 3 Функция распределения площади, периметра и совместное распределение площади и периметра будет представлена через переходы. Точнее,

$$\mathcal{N}(S) = \frac{1}{Q_S} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, O, t)}{t} \, dt,$$

т.е.

$$Q_S = \iint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, O, t)}{t} \, dt dS.$$

Аналогично,

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{Q_P} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} \, dt,$$

т.е.

$$Q_P = \iint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} \, dt dP,$$

и

$$\mathcal{N}(S, P) = \frac{1}{Q_{S,P}} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} \, dt,$$

т.е.

$$Q_{S,P} = \iiint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} \, dt dS dP.$$

Следствие 4 Для диаграммы Вороного, эти результаты выполнены.

Рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости. С каждой такой точкой мы связываем ее область притяжения, т. е. множество точек, для которых эта точка находится ближе, чем любая другая отмеченная. Задача состоит в нахождении функций распределения. Фактически распределения такие же, как и для случайного поля линий [8]. Поясним почему. В пространстве прямых существует мера, инвариантная относительно движений плоскости. Прямая может быть задана углом α и расстоянием r до фиксированной точки O , и эта мера равна $da dp$.

Если мы рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости и зафиксируем точку O из этого пуассоновского множества и выберем любую другую пуассоновскую точку P , то плотность вероятности, соответствующая линии, разделяющей плоскость на областях, близких к O и близких к P , будет иметь одинаковую плотность, пропорциональную $da dp$, где p — расстояние от P до O .

При изучении отрезка движения прямой L области P (многоугольника Вороного) в качестве O берется его точка пуассоновского процесса, соответствующая P , т.е. такая, что любая другая точка в процессе дальше от любой другой точки, кроме O .

Тогда мы видим, что вероятности перехода такие же, как и в случае разбиения прямыми линиями [8].

2 Обозначения

Мы используем общепринятые понятия стохастической геометрии и обычные определения из дифференциальных уравнений.

2.1 Условия и обозначения

Множество рациональных чисел, действительных чисел и комплексных чисел обозначается \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{C} соответственно. Кроме того, если $z \in \mathbb{C}$, то действительная и мнимая части z обозначаются через $\Re(z)$ и $\Im(z)$ соответственно.

Предположим, что A, B — две точки на плоскости. Тогда отрезок, соединяющий две точки A и B , обозначим через $[A, B]$, а его длину обозначим через $|AB|$.

Пусть $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – две функции. Для $x \rightarrow +\infty$ мы пишем $f = \mathcal{O}(g)$ (или $f \in \mathcal{O}(g)$), если существуют две константы x_0 и $D > 0$ такие, что для всех $x \geq x_0$ $|f(x)| \leq D|g(x)|$.

2.2 Пуассоновский процесс прямой

Мы можем интерпретировать процесс прямых как процесс точек.

Определение 5 *Пуассоновский процесс прямых с интенсивностью λ параметризуется точкой Пуассона процесс с интенсивностью λ на $[0, \pi) \times \mathbb{R}$.*

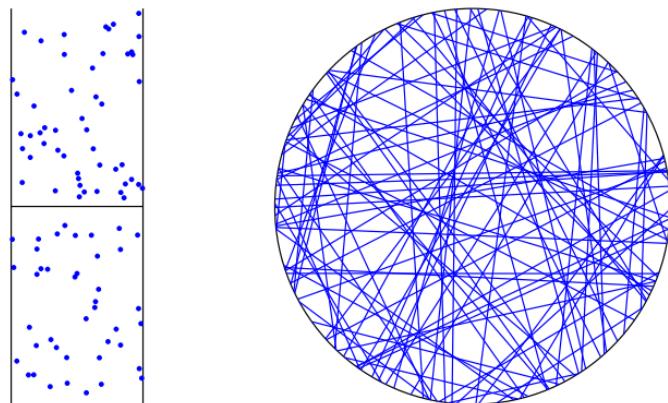


Рис. 1: Пуассоновский процесс прямых

Указав направление каждой прямой, ненаправленные пуассоновские процессы прямых можно преобразовать в направленные пуассоновские процессы прямых. Следовательно, естественным пространством параметров будет λ на $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Многоугольники Пуассона ограничены прямыми Пуассона.

Существует два уникальных подхода к выражению распределения, связанного с атрибутом многоугольника Пуассона (площадь, периметр, количество вершин):

- Присвоить одинаковый вес каждому многоугольнику в одной реализации. Полученные статистические свойства являются свойствами гипотетического многоугольника, известного как типичный многоугольник.

- Рассмотреть статистические характеристики многоугольника, содержащего фиксированную точку, например начало координат (фундаментальный многоугольник).

3 Случайные плоские разбиения. Кинетические уравнения.

Мы рассмотрим следующие задачи:

1. На плоскости задано случайное множество прямых, все сдвиги равновероятны, а закон распределения по направлениям имеет вид $F(\varphi)$.

Каково распределение частей разбиения по площадям? Представляет интерес совместные распределения. Особо будет рассмотрен случай пуассоновского поля прямых.

Строгая постановка этой задачи содержится, например, в книге [8].

2. На плоскости отмечено случайное множество точек. С каждой точкой A этого множества связана её область притяжения, т.е. множество точек плоскости, для которых точка A ближайшая из отмеченных. Области притяжения являются выпуклыми многоугольниками, для них возникают те же вопросы.

Данное разбиение называется мозаикой Вороного, строгая постановка этой задачи содержится в книге [8].

В дальнейшем будут использованы следующие вспомогательные идеи. Независимость движения концов сечения позволяет рассматривать только один конец, трудности связанные с рассмотрением несобственных интегралов преодолеваются с помощью следующего соображения: число частей разбиения размера больше d убывает как $e^{-\lambda d}$; число частей площади больше S убывает как $e^{-\lambda S}$ с ростом, соответственно d и S .

Мы начнём с задачи 1 для случая пуассоновского множества прямых, т.е. когда не только сдвиги, но и все углы наклона прямых равновероятны.

Пусть L – секущая прямая, движущаяся с единичной скоростью по плоскости и при этом не меняя своего направления.

Рассмотрим многоугольники разбиения, которые L пересекает и прежде всего их части, лежащие “под” прямой L . Отметим, что закон распределения для таких частей отличается от натурального (по отношению к единице площади) и переход к натуральному закону требует

особого рассмотрения.

Рассмотрим многоугольник разбиения M .

Через S мы будем обозначать пройденную площадь, l – длину сечения многоугольника M , α_1 и α_2 – углы, образованные L со сторонами M (см. рис. 2).

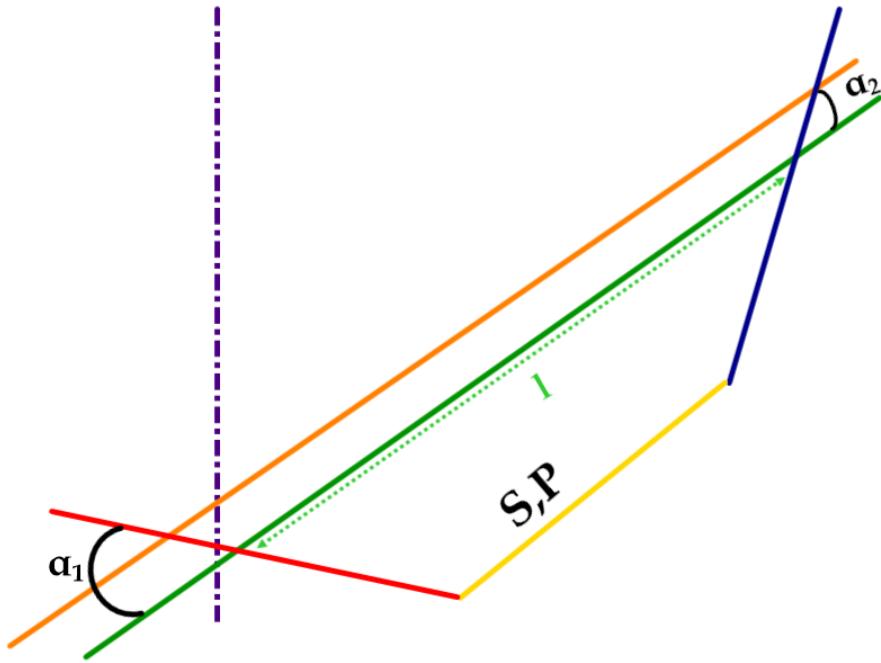


Рис. 2: Изменения параметров при движении секущей прямой

Предположим, что α – это старый угол, а α' – новый угол. Угол изменится с вероятностью

$$pdt = dp = \lambda dt \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

На предыдущем рисунке l , S и P обозначают длину отрезка, пройденную площадь и пройденный периметр. Кроме того, α_1, α_2 обозначают углы между поперечным сечением и боковыми прямыми соответственно. Следовательно, dl представляет собой приращение длины отрезка, и тогда

$$dl = dt (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)).$$

Кроме того,

$$dS = l dt,$$

и

$$dP = dt \left(\frac{1}{\sin(\alpha_1)} + \frac{1}{\sin(\alpha_2)} \right).$$

При сдвиге прямой L на расстояние dt возможны следующие события:

1. Сдвинутая прямая L' не пересечёт никакую другую сторону M . В этом случае,

$$S' = S + l dt; \quad l' = l + dt(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2); \quad \alpha'_1 = \alpha_1, \quad \alpha'_2 = \alpha_2. \quad (1)$$

2. Прямая L' пересечёт одну новую сторону M . Тогда $dS = l dt$, и один из углов α_1 или α_2 изменится. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда изменится α_1 . Новая сторона имеет больший угол наклона α'_1 , чем угол наклона старой α_1 .

Найдём плотность вероятности $Q_\alpha^{\alpha'}$ последнего перехода. Величиной dt (т.е. вероятностью того, что за dt произойдёт сечение сразу с двумя прямыми) мы пренебрегаем.

Рассмотрим отрезок $[A, A']$. Его длина равна $1/\sin \alpha_1$. Вероятность перехода $\alpha \rightarrow \beta$, где $\alpha' < \beta < \alpha' + d\alpha'$ есть вероятность того, что отрезок $[A, A']$ будет пересечён прямой с таким углом наклона. Эта вероятность равна проекции отрезка $[A, A']$ на нормаль к прямой, образующей с L угол α' ($d\alpha'$ – мало), умноженный на $\lambda d\alpha'$, где параметр λ характеризует интенсивность пуассоновского процесса прямых.

Соответствующая проекция $[A, A']$ равна

$$|AA'| \sin(\alpha' - \alpha), \quad \text{или} \quad \frac{dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Итак, искомая плотность вероятности равна

$$\frac{\lambda dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin \alpha} + \mathcal{O}(dt^2).$$

3. Прямая L пересечёт две новые стороны M .

Вероятность этого события имеет величину порядка $\mathcal{O}(dt^2)$, поэтому мы ею пренебрегаем. Поскольку число сторон многоугольника конечно, в случае 2 можно считать, что $dl = dt(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)$, поскольку ошибка полученное для целого многоугольника имеет порядок $dt \cdot N$, где N –

число сторон многоугольника. Устремляя dt к 0 мы получим точный результат.

Через $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$ мы обозначим плотность числа пройденных частей, примыкающих к L с пройденной площадью S , длиной следа l , углами α_1, α_2 на концах следа, и самая нижняя вершина которых находится на расстоянии t от L . (см. рис.2)

Дадим строгое определение N через предел:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \lim \frac{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t}^{\Delta S, \Delta l, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta t}}{\Delta S \cdot \Delta l \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 \cdot \Delta t}, \quad (2)$$

где W – относительное число частей (в единице длины сечения), чьи параметры заключены в пределах

$$[S, S + \Delta S], [l, l + \Delta l], [\alpha_1, \alpha_1 + \Delta \alpha_1], [\alpha_2, \alpha_2 + \Delta \alpha_2], [t, t + \Delta t].$$

Параметр t введён для учёта того эффекта, что при движении се-кущей прямой L на dt , как было сказано выше, происходят события, описанные в случаях 1,2,3.

Запишем соотношение баланса:

$$\begin{aligned} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) &= N(S - ldt, l - dt(\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2, t - dt) - \\ &N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \lambda dt \left(\int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} d\varphi + \int_{\alpha_2}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2)} d\varphi \right) + \\ &\lambda dt \left(\int_0^{\alpha_1} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi + \int_0^{\alpha_2} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Первый член первой части соответствует отсутствию пересечений за dt , второй член – соответствует уходу из состояния $(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$, а третий – приходу в это состояние.

Перепишем уравнение (3) в виде кинетического уравнения:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \frac{\partial N}{\partial l} + \frac{\partial N}{\partial t} + \lambda N \left(\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (4)$$

Аналогично можно выписать кинетическое уравнение периметров. Пусть r – пройденный периметр:

$$\left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N \left(\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(P, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(P, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (5)$$

Замечание 6 В знаменателе стоит $\sin \varphi$. Хотя при φ стремящемся к нулю, $\sin \varphi$ стремится к нулю, но интеграл сходится, потому что N тоже стремится к нулю.

Выпишем теперь кинетическое уравнение для случая произвольного закона $F(\varphi)$ распределения углов наклона. Пусть прямая L имеет нулевой угол наклона.

Пусть dF – матожидание числа точек пересечения единичного отрезка, нормального к прямой с углом наклона φ с прямой, чей угол наклона заключён между φ и $\varphi + d\varphi$. Функцию $F(\varphi)$ мы определим как предел:

$$F(\varphi) = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{dF}{d\varphi}. \quad (6)$$

Для левого конца плотность вероятности перехода $\alpha_1 \rightarrow \alpha'_1$ за “время” dt равна

$$dt \cdot F(\alpha'_1) \cdot \sin(\alpha'_1 - \alpha_1) / \sin \alpha_1,$$

и для правого конца плотность вероятности перехода $\alpha_2 \rightarrow \alpha'_2$ за “время” dt равна

$$dt \cdot F(\alpha'_2) \cdot \sin(\alpha'_2 - \alpha_2) / \sin \alpha_2.$$

Кинетическое уравнение площадей можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N (G_1(\alpha_1) + G_2(\alpha_2)) - \\
F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \\
F(\alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi, \quad (7)
\end{aligned}$$

где

$$G_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} F(\varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha} d\varphi, \quad (8)$$

$$G_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} F(\pi - \varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha} d\varphi.$$

Выпишем уравнение для периметров:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin(\alpha_1)} + \frac{1}{\sin(\alpha_2)} \right) \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + N \cdot (G_1(\alpha_1) + G_2(\alpha_2)) - \\
F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} N(P, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - F(\pi - \alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} N(P, l, \alpha_1, \varphi, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (9)
\end{aligned}$$

Уравнения (7) и (9) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + Q_1^F[N] + Q_2^F[N] = 0, \\
\frac{\partial N}{\partial P} \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{\partial N}{\partial P} \frac{1}{\sin \alpha_2} + \frac{\partial N}{\partial t} + Q_1^F[N] + Q_2^F[N] = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1^F[N] &= \frac{\partial N}{\partial P} \operatorname{ctg} \alpha_1 + G_1(\alpha_1) \cdot N - \\
&\quad F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} N(*, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi, \\
Q_2^F[N] &= \frac{\partial N}{\partial P} \operatorname{ctg} \alpha_2 + G_2(\alpha_2) \cdot N - \\
&\quad F(\pi - \alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} N(*, l, \varphi, \alpha_1, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi, \quad (11)
\end{aligned}$$

где * означает в первом случае площадь, а во втором – периметр, везде в операторах Q_i^F оно выступает как параметр.

Аналогично выписывается совместное уравнение для площади и периметра:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + + \frac{\partial N}{\partial P} \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{\partial N}{\partial P} \frac{1}{\sin \alpha_2} + \frac{\partial N}{\partial t} + Q_1^F[N] + Q_2^F[N] = 0 \quad (12)$$

Операторы Q_i^F коммутируют. Независимость локального движения концов отрезков отражается в виде уравнений (7), (9) and (10): операторы, связанные с f и g – независимы. Пусть

$$\tilde{Q}_i^F = Q_i^F + \frac{\partial N}{\partial P} \frac{1}{\sin \alpha_i}.$$

Тогда уравнения (9) и (12) перепишутся в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \tilde{Q}_1^F[N] + \tilde{Q}_2^F[N] = 0, \quad (13)$$

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + Q_1^F[N] + Q_2^F[N] = 0, \quad (14)$$

причём α_i входит только в Q_i^F . Это обстоятельство поможет нам в дальнейшем избавиться от одного из углов.

3.1 Границные условия

Предположим, $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} l &= t \cdot (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), s = l \cdot t/2 = \frac{t^2}{2} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), \\ p &= l + t \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) = t \cdot \left(\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2) + \frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) = \\ &= t \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1/2 + \pi/4)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2/2 + \pi/4)} \right). \end{aligned}$$

Угловая плотность $\mathcal{N}(\alpha_1, \alpha_2)$ при $t = 0$ и интенсивность пуассоновского процесса прямых λ следующие:

$$\mathcal{N}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda^2 \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2).$$

Следовательно, функция распределения $\mathcal{N}(s, p, t, l, \alpha_1, \alpha_2)$ асимптотична при $t \rightarrow 0$ обобщённой функции

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s, p, t, l, \alpha_1, \alpha_2) &= \mathcal{N}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \delta(l - t \cdot (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))) \cdot \\ &\cdot \delta\left(s - \frac{t^2}{2} (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))\right) \cdot \delta\left(p - t \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1/2 + \pi/4)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2/2 + \pi/4)}\right)\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где δ – δ -функция Дирака.

Односторонняя версия уравнения (15):

$$\mathcal{N}(\alpha_1) \cdot \delta(l - t \cdot (\cot(\alpha_1))) \delta\left(s - \frac{t^2}{2} (\cot(\alpha_1))\right) \delta\left(p - t \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha_1/2 + \pi/4)}\right)\right) \quad (16)$$

$$\mathcal{N}(\alpha_1) = \lambda \sin(\alpha_1).$$

Выполняется также аналогичное уравнение для α_2 .

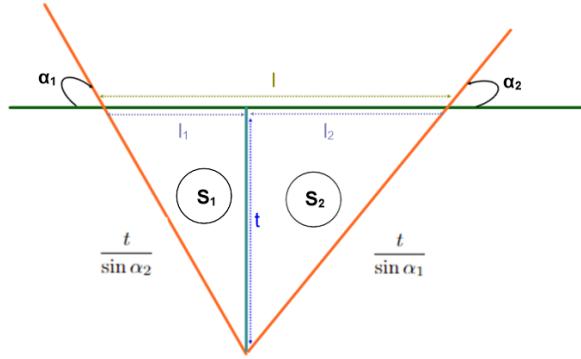


Рис. 3: Граничное условие при $t \rightarrow 0$

$$l = l_1 + l_2 = t \cdot \tan(\alpha_1) + t \cdot \tan(\alpha_2),$$

$$P = P_1 + P_2 = l_1 + \frac{t}{\sin(\alpha_1)} + \frac{t}{\sin(\alpha_2)}$$

и

$$S = S_1 + S_2 = \frac{l_1 t}{2} + \frac{l_2 t}{2} = \frac{lt}{2}.$$

4 Независимость концов локального интервала. Функции перехода и упрощения уравнений

Изучим поведение только “левого” конца с углом α_1 (сведение изучения уравнения (1) равно как и построение функции распределения будет дано в разделе 5). Введём необходимые определения и обозначения.

Переходы

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha'_1 \text{ и } \alpha_2 \rightarrow \alpha'_2.$$

В этом случае, можно определить приращение периметра ΔP и смещения Δl .

Рассмотрим “левый” конец сечения (рис. 4), его “состояние” характеризуется углом α_1 , $0 < \alpha_1 < \pi$. Через промежуток времени t его новое состояние характеризуется углом $\alpha'_1 \geq \alpha_1$. При переходе в новое состояние

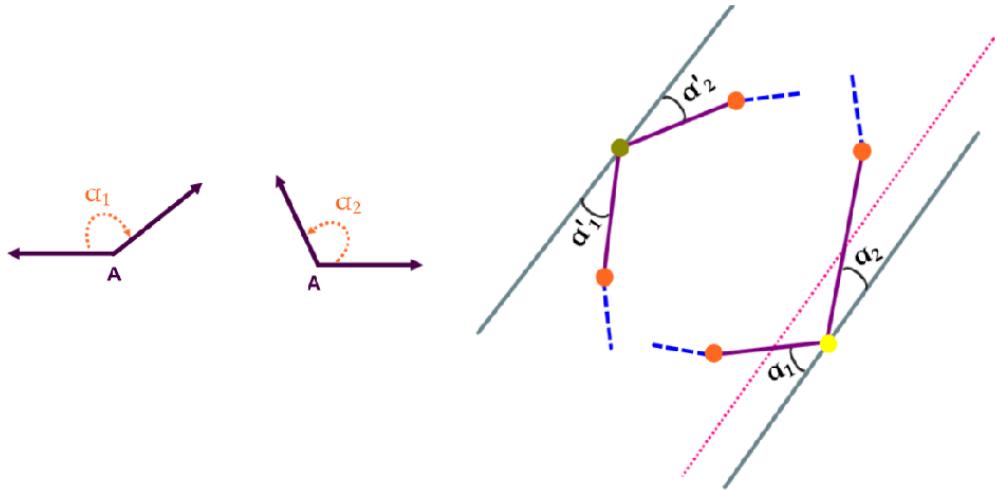


Рис. 4: Свертка, независимость движения концов

конец отрезка может пройти путь Δl и “вызвать” приращение периметра Δp .

Определим приращение площади. Для этого необходимо зафиксировать начало координат на прямой L .

Пусть точка O – левый конец сечения. Из т. O проведём прямую $M \perp L$. Площади мы будем отсчитывать как на рис. 2,

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2,$$

ΔS – пройденная площадь.

Через $\alpha \xrightarrow[\Delta S, \Delta l]{t} \alpha'$ мы будем обозначать плотность вероятности перехода от α к α' , при котором приращение площади равно ΔS , а смещение $-\Delta l$. Аналогичным образом можно определить величину $\alpha \xrightarrow[\Delta P, \Delta l]{t} \alpha'$ для периметров, и для площадей и периметров одновременно $\alpha \xrightarrow[\Delta S, \Delta P, \Delta l]{t} \alpha'$.

Пусть произошло два последовательных перехода: $\alpha \rightarrow \alpha'$ и $\alpha' \rightarrow \alpha''$. Первый характеризуется приращениями $t_1, \Delta P_1, \Delta S_1, \Delta l_1$, второй – $t_2, \Delta P_2, \Delta S_2, \Delta l_2$. Тогда сквозной переход характеризуется величинами

$$t_1 + t_2, \Delta P_1 + \Delta P_2, \Delta l_1 + \Delta l_2 \text{ и } \Delta S_1 + t_2 \Delta l_1 + \Delta S_2.$$

Второй член вызван сдвигом начала координат на Δl_1 .

Для величин $\alpha \xrightarrow[\Delta S, \Delta l]{t} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow[\Delta P, \Delta l]{t} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow[\Delta S, \Delta P, \Delta l]{t} \alpha'$ можно записать обобщённое уравнение Маркова:

$$\alpha \xrightarrow[l,S]{t_1+t_2} \alpha' = \int_{\mathcal{D}_1} \alpha \xrightarrow{l_1, S_1} \beta \cdot \beta \xrightarrow{l_2, S_2} \alpha' d\beta dl_1 dS_1, \quad (17)$$

где \mathcal{D}_1 определяется условиями:

$$\alpha \leq \beta \leq \alpha', \quad l_1 + l_2 = l \text{ и } S_1 + S_2 + l_1 \cdot t_2 = S,$$

$$\alpha \xrightarrow[l,P]{t_1+t_2} \alpha' = \int_{\mathcal{D}_2} \alpha \xrightarrow{l_1, P_1} \beta \cdot \beta \xrightarrow{l_2, P_2} \alpha' d\beta dl_1 dP_1, \quad (18)$$

где \mathcal{D}_2 определяется условиями:

$$\alpha \leq \beta \leq \alpha', \quad l_1 + l_2 = l \text{ и } P_1 + P_2 = P,$$

$$\alpha \xrightarrow[P,S]{t_1+t_2} \alpha' = \int_{\mathcal{D}_3} \alpha \xrightarrow{P_1, S_1, l_1} \beta \cdot \beta \xrightarrow{P_2, S_2, l_2} \alpha' d\beta dl_1 dP_1 dS_1, \quad (19)$$

где \mathcal{D}_3 определяется условиями:

$$\alpha \leq \beta \leq \alpha', \quad l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P \text{ и } S_1 + S_2 + l_1 \cdot t_2 = S.$$

Выпишем теперь уравнения для величин $\alpha \xrightarrow{l,P} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow{l,S} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow{P,S,l} \alpha'$:

$$\left(l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,S} \alpha' = 0, \quad (20)$$

$$\left(\frac{1}{\sin \alpha'} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,P} \alpha' = 0, \quad (21)$$

$$\left(l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{\sin \alpha'} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{l,S} \alpha' = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1^F[\mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \alpha')] = & \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial l} + G_1(\alpha') \cdot \mathfrak{R} - \\ & F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \varphi). \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (20)-(22) выводятся аналогично уравнениям (7),(9),(10).

Формальное интегрирование уравнений (20)-(22): сделав в уравнении (20) преобразование Лапласа по S, t , в уравнении (21) по P, S, l , и в уравнении (22) по P и S , мы имеем:

$$\left(-\widetilde{l}\widetilde{S} - \widetilde{t} + \widetilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \widehat{\frac{t}{S, l}} \alpha' = H_1, \quad (24)$$

$$\left(-\frac{1}{\sin \alpha'} \widetilde{P} - \widetilde{t} + \widetilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \widehat{\frac{t}{\widetilde{P}, \widetilde{l}}} \alpha' = H_2, \quad (25)$$

$$\left(-\widetilde{l}\widetilde{S} - \frac{1}{\sin \alpha'} \widetilde{P} - \widetilde{t} + \widetilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \widehat{\frac{t}{\widetilde{P}, \widetilde{S}, \widetilde{l}}} \alpha' = H_3, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_1^F [\widetilde{\Re}(*, *, \widetilde{l}, \alpha, \alpha')] = & -\operatorname{ctg} \alpha' \cdot \widetilde{l} + G_1(\alpha') \cdot \widetilde{\Re} - \\ & F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \Re(*, *, \widetilde{l}, \alpha, \varphi), \end{aligned}$$

а H_1, H_2, H_3 определяются граничными условиями.

Заметим, что плотность экспоненциально уменьшается по отношению к периметру и квадратному корню площади, поэтому преобразование Лапласа корректно.

Уравнения, где фигурирует площадь проинтегрировать не удаётся, однако уравнение (26) сводится к уравнению Рикатти. Через $\mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha')$ мы обозначим $\alpha \xrightarrow{l, S} \alpha'$ (для удобства записи). Тогда уравнение (24) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \widetilde{P} - \widetilde{t} - \operatorname{ctg} \alpha' \cdot \widetilde{l} + G_1(\alpha') \right] \mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha') - \\ & F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \mathcal{N}(\alpha, \widetilde{p}, \widetilde{l}, \widetilde{t}, \beta) \sin(\alpha' - \beta) / \sin \beta d\beta = H. \quad (27) \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha, \widetilde{p}, \widetilde{l}, \widetilde{t}, \alpha') = & \left(-\widetilde{P} - \widetilde{t} \sin \alpha' - \widetilde{l} \cos \alpha' + G_1(\alpha') \sin \alpha' \right) / F(\alpha'), \\ \widehat{H} = & H / F(\alpha'). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (27) перепишется в виде:

$$\mathcal{T}\widehat{\mathcal{N}} + \int \widehat{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) \sin(\alpha' - \beta) d\beta = \widehat{H}. \quad (28)$$

Дважды продифференцировав по α' и сложив его с собой, получим:

$$\mathcal{T}\widehat{\mathcal{N}}' + \mathcal{T}\widehat{\mathcal{N}} + \widehat{\mathcal{N}} = \widehat{H}'' + \widehat{H},$$

где $'$ означает дифференцирование по α' . Откуда, положив $\mathcal{Y} = \mathcal{T}\widehat{\mathcal{N}}$, $\nu = \widehat{H}'' + \widehat{H}$, имеем:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{Y} \cdot (\mathcal{T} + 1)/\mathcal{T} = \nu.$$

Пусть $\mathcal{G} = (\mathcal{T} + 1)/\mathcal{T}$. Тогда имеем уравнение:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{G} \cdot \mathcal{Y} = \nu,$$

которое, как известно, сводится к уравнению Рикатти.

5 Выражение распределений вдоль секущей прямой и на плоскости

5.1 Выражение функции распределения через переходы

В этой части мы обсудим распределение функции основанной на переходах $\alpha \xrightarrow[l,P]{t} \alpha'$, $\alpha \xrightarrow[l,S]{t} \alpha'$, и $\alpha \xrightarrow[S,P,l]{t} \alpha'$.

Выразим функции

$$\mathcal{N}(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t), \mathcal{N}(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \text{ и } \mathcal{N}(S, P, l, \alpha_1, \alpha_2, t).$$

Рассмотрим произвольную точку O пересечения прямых. Проведём через точку O прямую, параллельную секущей L . Тогда прямые l_1 и l_2 образуют с прямой L углы β_1 и β_2 (см. рис. 4)

Вероятность dp того что $\alpha_1^O < \beta_1 < \alpha_1^O + d\alpha_1^O$ и $\alpha_2^O < \beta_2 < \alpha_2^O + d\alpha_2^O$ равна:

$$dp = \frac{F(\alpha_1^O) \sin(\alpha_1^O) F(\pi - \alpha_2^O) \sin(\alpha_2^O) d\alpha_1^O d\alpha_2^O}{C^2}, \quad (29)$$

где

$$C = \int_0^\pi F(\alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (30)$$

Условная функция распределения $\mathcal{N}(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t, \alpha_1^O, \alpha_2^O)$ имеет вид:

$$\mathcal{N}(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t, \alpha_1^O, \alpha_2^O) = \int_{\mathcal{D}_4} \alpha_1^O \xrightarrow{l,S} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,S} \alpha_2 \, dl_1 dS_1, \quad (31)$$

где \mathcal{D}_4 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l \text{ и } S_1 + S_2 = S.$$

Откуда функция распределения по площадям имеет вид:

$$\mathcal{N}(S) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_5} \alpha_1^O \xrightarrow{l,1} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,2} \alpha_2 \, dl_1 dS_1 d\alpha_1^O d\alpha_2^O dt, \quad (32)$$

где \mathcal{D}_5 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad S_1 + S_2 = S, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi \text{ и } t > 0.$$

Аналогичные формулы можно выписать для периметров:

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_6} \alpha_1^O \xrightarrow{l,1} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,2} \alpha_2 \, dl_1 dP_1 d\alpha_1^O d\alpha_2^O dt, \quad (33)$$

где \mathcal{D}_6 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi \text{ и } t > 0,$$

и для совместного распределения по площади и периметру:

$$\mathcal{N}(S, P) = \frac{1}{C^2} \cdot \int_{\mathcal{D}_7} \alpha_1^O \xrightarrow{l,S} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l,S} \alpha_2 \, dl_1 dP_1 dS_1 d\alpha_1^O d\alpha_2^O dt, \quad (34)$$

где \mathcal{D}_7 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P, \quad S_1 + S_2 = S, \quad \alpha_1^O, \alpha_2^O > 0, \quad \alpha_1^O + \alpha_2^O < \pi \text{ и } t > 0.$$

Перейдём теперь к получению функций $\mathcal{N}(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$, $\mathcal{N}(S, P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$, $\mathcal{N}(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$.

Рассмотрим секущую прямую L . Точка пересечения L с прямыми характеризуется углом α . Функция $Q(\alpha)$ распределения углов есть:

$$Q(\alpha) = \frac{F(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{C}.$$

Сами точки пересечения образуют пуассоновское множество точек на секущей прямой, причём функция распределения углов различных точек независимы. Найдём интенсивность процесса λ . Она равна матожиданию числа точек пересечения единичного отрезка на L или

$$\lambda = \int_0^\pi F(\alpha) \sin \alpha d\alpha = C.$$

Откуда функция распределения отрезков по длине будет равна

$$\mathcal{N}(l) = \frac{e^{-l/C}}{C}.$$

А функция $\mathcal{N}(l, \alpha_1, \alpha_2)$ распределения следов по длинам и углам будет

$$\mathcal{N}(l, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{-l/C} \cdot F(\alpha_1) F(\pi - \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)}{C^3}.$$

Рассматривая уравнение назад, имеем:

$$\mathcal{N}(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \mathcal{N}(l, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \int_{\mathcal{D}_8} \alpha_1^O \xrightarrow[l_1, S_1]{t} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow[l_2, S_2]{t} \alpha_2 \, dl_1 dS_1, \quad (35)$$

где \mathcal{D}_8 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l \text{ и } S_1 + S_2 = S.$$

$$\mathcal{N}(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \mathcal{N}(l, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \int_{\mathcal{D}_9} \alpha_1^O \xrightarrow[l_1, P_1]{t} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow[l_2, P_2]{t} \alpha_2 \, dl_1 dP_1 \quad (36)$$

где \mathcal{D}_9 определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l \text{ и } P_1 + P_2 = P,$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(S, P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \mathcal{N}(l, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \\ \int_{\mathcal{D}_{10}} \alpha_1^O \xrightarrow{l_1, P_1, S_1} \alpha_1 \cdot \alpha_2^O \xrightarrow{l_2, P_2, S_2} \alpha_2 \, dl_1 dP_1 dS_1, \end{aligned} \quad (37)$$

где \mathcal{D}_{10} определяется условиями:

$$l_1 + l_2 = l, \quad P_1 + P_2 = P \text{ и } S_1 + S_2 = S.$$

5.2 Выражение распределений на плоскости через распределение вдоль линии сечения

Выразим теперь $\mathcal{N}(S)$, $\mathcal{N}(P)$, $\mathcal{N}(S, P)$ через соответствующие функции сечения. Воспользуемся тем, что каждый многоугольник считается с кратностью, пропорциональной длине нормали L . Поэтому,

$$\mathcal{N}(S) = \frac{1}{Q_S} \cdot \int_{\mathcal{D}_{11}} \frac{\mathcal{N}(S, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} \, d\alpha_1 d\alpha_2 dt, \quad (38)$$

где \mathcal{D}_{11} определяется условиями:

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0,$$

а

$$Q_S = \int_{\mathcal{D}_{12}} \frac{\mathcal{N}(S, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} \, d\alpha_1 d\alpha_2 dt dS, \quad (39)$$

где \mathcal{D}_{12} определяется условиями:

$$S, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0.$$

Аналогично

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{Q_P} \cdot \int_{\mathcal{D}_{13}} \frac{\mathcal{N}(P, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} \, d\alpha_1 d\alpha_2 dt, \quad (40)$$

где \mathcal{D}_{13} определяется условиями:

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0,$$

при этом

$$Q_P = \int_{\mathcal{D}_{14}} \frac{\mathcal{N}(P, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} d\alpha_1 d\alpha_2 dt dP, \quad (41)$$

где \mathcal{D}_{14} определяется условиями:

$$P, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0,$$

и

$$\mathcal{N}(S, P) = \frac{1}{Q_{S,P}} \cdot \int_{\mathcal{D}_{15}} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} d\alpha_1 d\alpha_2 dt, \quad (42)$$

где \mathcal{D}_{15} определяется условиями:

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0,$$

где

$$Q_{S,P} = \int_{\mathcal{D}_{16}} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, \alpha_1, \alpha_2, t)}{t} d\alpha_1 d\alpha_2 dt dS dP, \quad (43)$$

при этом \mathcal{D}_{16} определяется условиями:

$$S, P, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \pi \text{ и } t > 0.$$

6 Вопросы обоснования.

В предыдущем параграфе рассуждения, связанные с выводом основного уравнения и с переходом от распределений вдоль секущей прямой к натуральному закону распределения были проведены на физическом уровне строгости.

Данный параграф посвящён вопросам обоснования. Мы покажем как довести рассуждения до математического уровня строгости с помощью аппроксимации функции распределения для пуассоновского множества прямых случаем n систем, где $n \rightarrow \infty$.

Наконец, хотя строгое определение понятия пуассоновского множества содержится в литературе (см., например, [8, 9]), однако мы выберем методически другой путь определения пуассоновского множества прямых с помощью закона нуля или единицы.

6.1 Закон 0 или 1.

Покажем, как с помощью этого закона можно обосновать понятия связанные со случайной средой.

Чтобы проиллюстрировать идею, рассмотрим вначале хорошо известный модельный пример. Пусть $\varepsilon_i, i = 1, \dots, \infty$ – последовательность независимых случайных величин, принимающих значения 0 или 1. Пусть a_i – последовательность действительных чисел. Что можно сказать о ряде $\sum a_i \varepsilon_i$? Ничего не зная о последовательности a_i можно сказать сразу, что он либо сходится, либо расходится с вероятностью 1. (На самом деле, он почти наверняка сходится, если $\sum a_i^2 < \infty$ и расходится, если $\sum a_i^2 = \infty$).

Причина сходимости с вероятностью 0 или 1 заключается в том, что свойство сходимости не зависит ни от какого конечного набора величин ε_i . Тем самым множество M сходимости не зависит ни от какого множества значений ε_i , и, следовательно, от борелевского поля, порождённого ими. Но множество сходимости определяется через ε_i , и тем самым принадлежит борелевскому полю, порождённому этими величинами. Поэтому, множество M не зависит само от себя, поэтому M имеет меру 0 или 1.

Более строгое обоснование закона 0 или 1, содержится, например, в книге [12].

Если случайная среда задана бесконечным набором случайных величин, а её асимптотические свойства не зависят ни от какого конечного набора, то выполняются асимптотические утверждения с вероятностью 0 или 1.

Это утверждение негласно широко используется: об образце породы говорят как о случайной среде, при этом предполагают, что её статистические свойства задают поведение образца. Но если бы закон 0 или 1 был бы неверен, то об эффективных характеристиках среды не всегда можно было бы говорить: возникло бы принципиальное различие свойств двух одинаковых кусков породы: если данная характеристика задавалась бы с вероятностью отличной от 0 или 1 возникла бы принципиальная неоднозначность определения эффективных характеристик; но при вычислении той или иной характеристики всегда подразумевается её существование.

Перейдём теперь к рассмотрению пуассоновского множества прямых. Прямая задаётся углом наклона φ и расстоянием r до начала координат. При этом $0 < \varphi < \pi$, $r > 0$.

Пуассоновский точечный процесс в пространстве параметров (r, φ) определяет пуассоновский линейный процесс на плоскости. Пуассоновский точечный процесс можно задать с помощью счётного набора независимых случайных величин. Разобьём пространство параметров на прямоугольники: $K < r < K + 1$, и рассмотрим n_K – случайные величины, выражающие числа точек в K -ом прямоугольнике, $T_{i,l}$ $i, l = 1 \dots \infty$ – координаты $(l - 1)$ -ой случайной точки в i -м прямоугольнике. n_K принимает с вероятностью $\frac{\alpha^n}{n!} \cdot \exp(-n\alpha)$ значение n , а $T_{i,l}^r, T_{i,l}^\varphi$ – величины, равномерно распределённые на i -м прямоугольнике: если $l > n$, то задаваемая ими точка не принимается во внимание.

Ясно, что изменение значения конечного множества величин оказывает влияние только на конечное множество прямых случайного разбиения и, следовательно, не оказывает влияние на асимптотические свойства разбиения, так что каждое асимптотическое утверждение выполнено с вероятностью 0 или 1.

6.2 Аппроксимация пуассоновского процесса случайным n систем.

Мы будем аппроксимировать пуассоновское множество прямых n системами равностоящих прямых, при этом системы прямых будут находиться в общем положении: т.е. если выбрать произвольную пару систем и с помощью афинного преобразования плоскости привести её к решётке единичных квадратов, то в системе координат, связанной с этой решёткой, тангенсы углов наклона остальных систем будут иррациональными числами, линейно независимыми над \mathbb{Q} , будет справедлива формула !!! для числа частей разбиения, удовлетворяющих данному свойству из теоремы !!!. При этом вероятность числа точек пересечения отрезка с прямыми будет стремиться к соответствующей величине для Пуассоновского закона. Форму k -угольника можно задать k параметрами и соответствующие функции распределения будут стремиться к тому, к чему нужно.

С другой стороны, при проведении рассуждения с Ndt^{-2} все рассуждения, связанные с выводом разностного уравнения, становятся строгими. Устремление N к бесконечности завершает обоснование.

В остальных точках обоснование строится аналогично.

7 Заключительные замечания

Ричард Майлз в 1972 году открыл частичные результаты, относящиеся к теме, которую мы изложили в этой работе. Он обсуждал средние значения случайного разделения [5], а мы сформулировали функции плотности и решили ее полностью.

В заключение, есть и другие интригующие задачи этого типа, и мы планируем исследовать их в будущем. Например, распространение одной и той же задачи на различные структуры, такие как гиперболическая геометрия, сферическая геометрия и т.д.

Список литературы

- [1] *Белов А.Я.* Геометрические свойства блочных сред. , Деп. в ВИНИТИ. №272-В91, ВИНИТИ, Москва, 1991 , 30 с.
- [2] *Белов А.Я.* О случайных разбиениях.. , Деп. в ВИНИТИ. №273-В91, ВИНИТИ, Москва, 1991 , 26 с.
- [3] *Белов А.Я.* Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов. , Дисс. на соиск. уч.ст. канд.физ.мат.наук, н.рук. Р.Л.Салганик, МГИ, Москва., 1991 , 190 с.
- [4] *A. Kanel-Belov, M. Golafshan, S. Malev, R. Yavich.* ABOUT RANDOM SPLITTING OF THE PLANE. , Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH), p: 294-295 2020.
- [5] *R. Miles.* The random division of space. , Advances in Applied Probability, 1972.
- [6] *R. Miles.* Poisson flats in euclidean spaces. , Adv. Appl. Prob., Vol. 1, pp. 211-237.
- [7] *Кендалл М., Моран М.* Геометрические вероятности. Москва, “Наука”, 1972.
- [8] *Сентало Д.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. Москва, “Наука”, 1983.

- [9] *Ж. Матерон.* Случайные множества и интегральная геометрия.. , М.:Мир,1978.
- [10] *P. B. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян* Введение в стохастическую геометрию. Москва, “Наука”, 1989.
- [11] *Анощенко Н. Н.* Геометрический анализ трещиновости и блочности месторождений облицовочного камня. , Математические методы и приложения. Четвертый математический Симпозиум. М.:МГИ, 1983.
- [12] *Lamperti, J.* Probability. A survey of the mathematical theory. Mathematics Monograph Series. New York-Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc. X, 150 p. (1966).