ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК. ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

.

$$a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x)+a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x)+\ldots+a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x)+\ldots+a_0(x)u(x)=0$$

$a_i(x)$ – голоморфные функции. Приводится к виду

$$H\left(r,-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u=0,\ k=-1,0,1\ldots.$$

Где $H(r,p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(r)p^i$

$H_0(p)=H(0,p)$ – основной символ

Проблема состоит в построении асимптотик решений уравнения в окрестности особой

точки (точки вырождения коэффициента при старшей производной)

* Sternberg W. Uber die asymptotische Integration von Differencialgleichungen, Verlag von Julius Spriger, Berlin, 1920.

* Thomé, L.W. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. *J. Für Die Reine Und Angew. Math.* **1872**, *74*, 193–217.

* Olver, F.W.J. *Asymptotics and Special Functions (AKP Classics)*; A K Peters/CRC Press: Wellesley, MA, USA, 1997.

* Cesari, L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1963.

* Coddington, E.; Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*; Krieger Publishing Company: Malabar, FL, USA, 1958.

ВОЗМОЖНЫЕ ТИПЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК

И АССИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ

$$H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr},r\right)u=0,\ k=-1,0$$

$$H(r,p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(r)p^i$$

$H_0(p)=H(0,p)$ – основной символ

$k=-1$ – неособая точка решения – $\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k$

$k=0$ –УРАВНЕНИЕ ФУКСОВА ТИПА (регулярная особая точка)

$\sum_{i=1}^{m} \left(\ln^{i} r\right) r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i r^k$ – конормальная асимптотика

$k = 1$ – УРАВНЕНИЕ НЕФУКСОВА ТИПА (иррегулярная особая точка) – $e^{\frac{a}{r}} r^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$

Произвольное k – $e^{\frac{\alpha}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha^j{}_{k-i}}{r^{k-i}}} r^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} b_i r^i$ – НЕФУКСОВА АСИМПТОТИКА

*Poincaré, H. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Math.* **1886**, *8*, 295–344.

* Poincare, H. Analysis of the mathematical and natural works of Henri Poincare. In *Selected Works in Three Volumes. Volume 3. Mathematics. Theoretical Physics*; “Nauka” Publishing House: Moscow, Russia, 1974.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА БОРЕЛЯ

$E^k_{R,\varepsilon}$ – пространство функций k-экспоненциального роста

$$|f| < Ce^{\frac{\alpha}{|r|^k}}$$

голоморфных в области $|r| < R, -\varepsilon < \arg r < \varepsilon$ с параметрами R, ε зависящими от функции f .

$E\left(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}\right)$ – функции голоморфные в области $\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}$ экспоненциального роста.

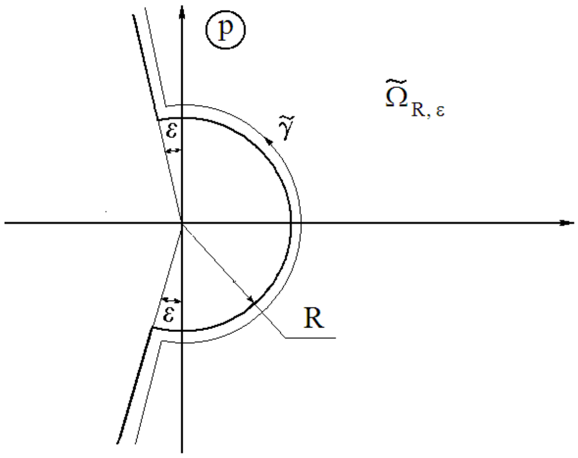
ТЕОРЕМА. Пусть $f \in E^k_{R,\varepsilon}$, тогда формулы

$$B_k f = \int_0^{r_0} e^{-\frac{p}{r^k}} f(r) \frac{dr}{r^{k+1}}, \qquad B_k^{-1} \widetilde{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\gamma}} e^{\frac{p}{r^k}} \widetilde{f}(p)\, dp$$

определяют взаимно однозначные отображения в пространствах

$$B_k : E^k_{R,\varepsilon} \to E\left(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}\right) / E(C)$$

$$B_k^{-1} : E\left(\widetilde{\Omega}_{R,\varepsilon}\right) / E(C) \to E^k_{R,\varepsilon}$$



*J. Ecalle. Cinq applications des fonctions résurgentes. // Prepub. Math. d'Orsay, 1984, 84T62, # 110 pp.

*Sternin, B.; Shatalov, V. *Borel–Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis*; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 1996.

РЕСУРГЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элемент f пространства $E_{R,\varepsilon}$ называется k-**ресургентной функцией**, если его k-преобразование Бореля $\tilde{f} = B_k f$ является бесконечно-продолжимым.*

Функция $\tilde{f}$ называется ***бесконечно-продолжимой***, если для любого числа *R* существует такое дискретное множество точек Z_R в C, что функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается из первоначальной области определения вдоль любого пути длины < *R*, не проходящего через Z_R.

ТЕОРЕМА. Пусть** f* **– ресургентная функция, тогда** ***решение уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = f$ ***является ресургентной функцией. Если полином*** $H_0(p)$ ***имеет корни первого порядка в точках*** $p_1,\ldots,p_m$***, тогда асимптотики решений однородного уравнения имеет вид***

$$u(r) \approx \sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} B_i^j r^i,$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$.

$$u(r) \approx \sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha^1{}_{k-i}}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i$$

* Korovina, M.V.; Shatalov, V.E. Differential equations with degeneration and resurgent analysis, *Differential Equations*, **2010,** 46:9, 1267–1286

* M. V. Korovina, “Asymptotics of solutions of equations with higher degenerations”, *Differential Equations*, **48**:5 (2012), 717–729

* Korovina, M.V. Repeated quantization method and its applications to the construction of asymptotics of solutions of equations with degeneration. *Differ. Equ.* **2016**, *52*, 58–75.

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x)+a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x)+\ldots+a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x)+\ldots+a_0(x)u(x)=0$$

$a_i(x)$ – функции голоморфные в окрестности бесконечности. Это означает, что $\exists a : |x| > a$, что функции $a_i(r), i = 0,1,\ldots,n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_i^j}{x^j}$

замена $x=\frac{1}{r}$

$$H\left(r,-r^2\frac{d}{dr}\right)u=0$$

$$H(r,p)=p^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(r)p^i$$

В общем случае точка $r=0$ является иррегулярной особой точкой.

Форулировка основных результатов

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x)+a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x)+\ldots+a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x)+\ldots+a_0(x)u(x)=0$$

$$a_i(r)=\sum_{j=1}^{\infty}a_i^j r^j\ .$$

Пусть первые l_i-1 коэффициенты степенного ряда $\sum_{j=1}^{\infty}a_i^j r^j$, равны нулю,

левая часть уравнения представима в виде суммы слагаемых вида

$\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^n$ и $\left(\sum_{j=l_i}^{\infty}a_i^j r^j\right)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i, i=0,\ldots,n-1$. Выберем среди этих слагаемых те, для которых число

$h=l_i+i$ минимально. $\mathrm{Index\,sing}\hat{H}=h=l_i+i$

обозначим коэффициент при минимальной сумме степени r и порядка производной через $\widetilde{a}_i, i = 0,...,k$.

$$\hat{H}u = \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^n u + \widetilde{a}_0 r^m \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^k u + \widetilde{a}_1 r^{m+1}\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \widetilde{a}_2 r^{m+2}\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + ... + \widetilde{a}_k r^{m+k} u +$$
$$+\sum_{j=1}^{h} r^j \sum_{i=h_j}^{n-1} a_j^i(r)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{h+1}\sum_{i=0}^{n-1} a^i(r)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i u = 0$$

(2)

Числа h_j и j выбраны так, что выполнялось неравенство $h_j + j > m + k$.

$Index\sin g\hat{H} = m + k$

Разделим уравнения на два типа.

1. Для младших членов выполнено неравенство

$$h_i + j - h > (m - j)\frac{n-h}{m} \qquad (*)$$

2. Неравенство не выполнено.

ТЕОРЕМА. Пусть $h_i + j - h > (m - j)\dfrac{n-h}{m}$, тогда любая асимптотика решения уравнения (2) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{l}^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где $\alpha_{n-k-m}^j, j = 1,...,n-k$ корни полинома $p^{n-k} + \left(\dfrac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть $h_i + j - h > (m - j)\dfrac{n-h}{m}$ тогда любая асимптотика решения имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{v} \exp\left(\sum_{l=1}^{n-k-m-\beta_1} \beta_l^j x^{\frac{l}{n-k-m-\beta_1+i}}\right) x^{\sigma_j^1} \sum_{j=0}^{\infty} A_i^j x^{-\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}} +$$
$$+\sum_{j=1}^{\beta_1+m-i} \exp\left(\sum_{t=1}^{\beta_1} \alpha_t^j x^{\frac{t}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_t^j x^{-\frac{l}{m-i+\beta_1}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i}$$

Здесь введены обозначения:

$v = n - k + i - m - \beta_1$, $\beta_{n-k-m-\beta_1}^j, j = 1,...,v$ являются корнями полинома $p^v + b_1\left(\dfrac{v}{v-i}\right)^v$.

$\alpha_{\beta_1}^j, j = 1,...,m - i + \beta_1$ -корни полинома $a_0 + b_1\left(\dfrac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_1} p^{-i+m+\beta_1}$, $d = 1 + \dfrac{\beta}{m - i + \beta}$.

Через $A_i^j, B_i^j . \sigma_j^1, \sigma_j^2, b_i^j, k_0$ обозначены некоторые числа, $\sum_{t=0}^{\infty} A_t^j x^t, \sum_{t=0}^{\infty} B_t^j x^t$ – асимптотические ряды.

1. Korovina, M. Asymptotics of Solutions of Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely Distant Point. *Mathematics* **2020**, *8*, 2249. https://doi.org/10.3390/math8122249

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ. ОБЩИЙ ВИД АСИМПТОТИКИ.

ТЕОРЕМА. Асимптотики любого из решений уравнения (1)в пространстве функций k-экспоненциального роста представимы в виде суммы асимптотичемких членов u_i***, каждый из которых соответствует i-му корню основного символа кратности*** v_i

$$u_i \approx \exp\left(P_i\left(r^{\frac{1}{l_i}}\right)\right)\sum_{j=1}^{m_i} r^{\sigma_j^i} \ln^j r \sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l \qquad (3)$$

Здесь $l_i \le v_i$***,*** $P_i(x) = M_i x^{k_i} + \ldots + M_1 x$ – полином $\frac{k_i}{l_i} \le k-1$, ***через*** m_i, σ_j^i, a_i^j ***обозначены соответствующие константы,*** $\sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l$ *– асимптотические* ***степенные ряды.***

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ

Рассмотрим уравнение n-го порядка с корнем кратности k в нуле

$$\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^n u + \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i(r)\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^i u + a_k\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^k u + \sum_{i=0}^{k} r^{m_i} a_i^0(r)\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^i u = 0 \qquad (4)$$

.

Здесь $m_i > 0$. Асимптотический член решения уравнения (4) соответствующий нулевому корню основного символа имеет тот же вид, что асимптотика решения уравнения

$$a_k\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^k u + \sum_{i=0}^{k} r^{m_i} a_i^0(r)\left(-\frac{1}{m-1} r^m \frac{d}{dr}\right)^i u = 0 \qquad (5)$$

То есть асимптотики совпадают с точностью до коэффициентов асимптотических рядов , входящих в (3) . Заметим, что основной символ уравнения (5) является однородным полиномом степени k.

Уравнение (5) с помощью соответствующего преобразования сводится к уравнению с меньшей кратностью корней основного символа, и так далее пока максимальная кратность корня не опускается до 1.