

5 – 13 июля 2023 г.

Задачи определения квазистационарных
электромагнитных полей в слабо
неоднородных средах

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, С.А. Малов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(x, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(x, t)}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(x, t) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(x, t) = 4\pi\rho(x, t). \quad (4)$$

Материальные соотношения

$$\vec{D}(x, t) = \varepsilon(x) \vec{E}(x, t), \quad \vec{B}(x, t) = \mu(x) \vec{H}(x, t). \quad (5)$$

$$\vec{J}(x, t) = \sigma(x) \vec{E}(x, t) + \vec{J}^{\text{ext}}(x, t). \quad (6)$$

$$(x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad T > 0.$$

¹Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.

Начально-краевая задача

При использовании материальных соотношений система уравнений Максвелла примет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E}, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mu \vec{H}(x, t) = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E}(x, t) = 4\pi \rho(x, t). \quad (10)$$

Граничные условия

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (11)$$

Начальные условия

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \quad \vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Система уравнений Максвелла в безразмерных переменных

Δx – характерный пространственный масштаб, Δt – характерный временной масштаб, σ^* – характерное значение удельной проводимости, Заменим переменную x на $\Delta x \cdot x'$, t на $\Delta t \cdot t'$, $\sigma = \sigma^* \sigma_0$,

$$\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*, \quad \beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}, \quad \vec{J}^{\text{ext}} = \sigma^*\sigma_0\vec{E}^{\text{ext}}.$$

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma\beta\sigma_0\vec{E} + \gamma\beta\sigma_0\vec{E}^{\text{ext}} + \beta\frac{\partial}{\partial t'}\varepsilon\vec{E}, \quad (13)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t'}\mu\vec{H}. \quad (14)$$

Квазистационарное магнитное приближение

В уравнении (1) $\partial \vec{D}/c\partial t \approx 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(x, t).$$

Начально-краевая задача:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}}, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H}. \quad (16)$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (17)$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

¹Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.

Квазистационарное магнитное приближение I

- Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. – М.: Мир, 1988.
- Bossavit A. The computation of eddy-currents, in dimension 3, by using mixed finite elements and boundary elements in association// Math. Comput. Modelling, 1991:15(3-5):33–42.
- Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Физматлит, 1995.
- Ammari, H., Buffa, A., Nedelec, J.-C.: A justification of eddy currents model for the Maxwell equations SIAM J. Appl. Math. 2000. Vol. 60. No. 5. P. 1805-023.
- Kang T., Kim K.I., Wu Z. An E-based splitting finite element method for time-dependent eddy current equations // J. of Comp. and Appl. Math. 2006. 196. 358–367.
- Meddahi S., Selgas V. An H -based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem//App. Num. Math. 2008;58:1061–1083.

Квазистационарное магнитное приближение II

- Acevedo R., Meddahi S., Rodriguez R. An E -based mixed formulation for a time-dependent eddy current problem // Math. Comput. 2009;78:1929–49.
- Alonso Rodriguez A., Valli A. Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
- Camano J, Rodriges R. Analyses of a FEM-BEM model posed on the conducting domain for time-dependent eddy current problem // J. of Comp. and Appl. Math. 2012. 236. 3084–3100.
- Arnold L., Harrach B. A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations // SIAM J. Appl. Math. 2012;7:558–76.
- Калинин А.В., Калинкина А.А. Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 21-38.

Квазистационарное магнитное приближение III

- Калинин А.В., Тюхтина А.А. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями // Журнал Средневолжского математического общества. № 4. Т. 18. 2016. С. 119-133.
- Kalinin A.V., Tyukhtina A.A., Lavrova S.R. Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. № 1. V. 158. 2016. P. 012046.
- Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Stable sequential Lagrange principles in the inverse final observation problem for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation// Differential Equations, 2016;52(5):587–603.
- Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. On the inverse problems of final observation for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation and stable sequential Lagrange principles of its solution// Comput. Math. Math. Phys. 2017;57(2):187–209.

- Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems / A.V. Kalinin, A.A. Tyukhtina // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – V.41. № 18. – P. 9283-9292.

Квазистационарное электрическое приближение

В уравнении (2) $\partial \vec{B} / c \partial t \approx 0$.

Начально-краевая задача

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E}, \quad (19)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (20)$$

Граничные условия

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (21)$$

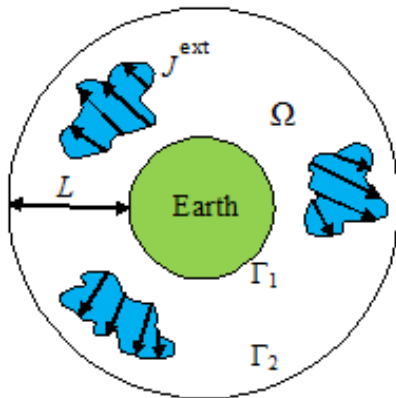
Начальные условия

$$\vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{rot} \vec{e} = 0. \quad (22)$$

¹Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.

²Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 450. No. 1. P. 112-136.

Глобальная электрическая цепь в атмосфере



$$L \sim 70 - 100 \text{ km},$$

$$\Delta U \sim 250 \text{ kV},$$

$$|\vec{j}^{\text{ext}}| \sim 1.10 \text{ nA/m}^2,$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 \exp(\alpha(|x| - R_E)).$$

$$\sigma_0 \sim 3 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\text{Om} \cdot \text{m}},$$

$$\alpha \sim 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m},$$

$$R_E \approx 6370 \text{ km}.$$

¹Wilson T.R. *Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms* // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1921. V. 221. P. 73–115.

²Wilson T.R. *The electric field of a thundercloud and some of its effects* // Proc. Phys. Soc. London. 1924. V. 37. P. 32D–37D.

³Mareev E.A., Anisimov S.V. *Global Electric Circuit as an Open Dissipative System* // Proc. 12th Int. Conf. on Atmospheric Electricity, Versailles, 2003. P. 797–800.

- Markson R. The global circuit intensity: its measurement and variation over the last 50 years // Bull. Am. Met. Soc. 2007. V. 88. N 2. P. 223–241.
- Rycroft M.J., Harrison R.G., Nicoll K.A., Mareev E.A. An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity // Space Sci. Rev. 2008. V. 137. N 1–4. P. 83–105.
- Anisimov S.V., Mareev E.A. Geophysical studies of the global electric circuit // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2008. V. 44. № 10. P. 760–769.
- Mareev E.A., Yashunin S.A., Davydenko S.S. et al. On the role of transient currents in the global electric circuit // Geophys. Res. Lett. 2008. V. 35. N 15. L15810.
- Williams E.R. The global electrical circuit: a review // Atmos. Res. 2009. V. 91. N 2–4. P. 140–152.

- Liu C., Williams E.R., Zipser E.J., Burns G. Diurnal variation of global thunderstorms and electrified shower clouds and their contribution to the global electrical circuit // J. Atmos. Sci. 2010. V. 67. N 2. P. 309–323.
- Zhou L., Tinsley B.A. Global circuit model with clouds // J. Atmos. Sci. 2010. V. 67. N 4. P. 1143–1156.
- Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 527-534.
- Rycroft M.J., Harrison R.G. Electromagnetic atmosphere plasma coupling: the global atmospheric electric circuit // Space Sci. Rev. 2011. V. 168. N 1–4. P. 363–384.
- Mach D.M., Blakeslee R.J., Bateman M.G. Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics // J. Geophys. Res. 2011. V. 116. N D5. D05201.

- Williams E., Mareev E. Recent progress on the global electrical circuit // Atmos. Res. 2014. V. 135-136. P. 208–227.
- Jansky J., Pasko V.P. Charge balance and ionospheric potential dynamics in timedependent global electric circuit model // J. Geophys. Res. Space Physics. 2014. V. 229. N. 12. P. 10184–10203.
- Bayona V., Flyer N., Lucas G.M., Baumgaertner A.J.G. A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0) // Geosci. Model Dev. 2015. V. 8. N 10. P. 3007–3020.

Задача для системы уравнений Максвелла в электрическом приближении

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшиц-непрерывной границей Γ , состоящей из компонент связности Γ_1, Γ_2 , гомеоморфных сферам в $\mathbb{R}^3$.

$\varepsilon = \mu = 1, \sigma \in L_\infty(\Omega), \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2$.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \quad (23)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (24)$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (25)$$

$$\vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{rot} \vec{e} = 0. \quad (26)$$

Задача в терминах скалярного электрического потенциала

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (-\sigma \operatorname{grad} \varphi + \vec{J}^{\text{ext}}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi, \quad (28)$$

$$\varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_1} = 0 \quad \varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_2} = u(t), \quad (29)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (30)$$

Задача для системы уравнений Максвелла в электрическом приближении

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + 4\pi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 4\pi \operatorname{div} \vec{J}^{\text{ext}}, \quad (31)$$

$$\int_{\Gamma_i} ((\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi \sigma \operatorname{grad} \varphi) - 4\pi \vec{J}^{\text{ext}}) \cdot \vec{\nu} d\gamma = 0, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (33)$$

$$\varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_1} = 0, \quad \varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_2} = u(t), \quad t \in (0, T), \quad (34)$$

$$u(0) = \varphi_0|_{\Gamma_2} = \text{const.}$$

Неклассические задачи математической физики I

- Соболев С.Л. Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных // Доклады АН СССР. 1951. Т. 81, № 6. С. 1007–1009.
- Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954. Т. 18, выпуск 1. С. 3–50.
- Showalter R.E. Local regularity of solutions of Sobolev-Galpern differential equations // Pacif. J. Math. 1970. V. 34, N 3. P. 781–787.
- Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998.
- Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

- Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 123-129.
- Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А. Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3. С. 314-322.
- Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Kalinin A.V., Zhidkov A.A. Influence of large-scale conductivity inhomogeneities in the atmosphere on the global electric circuit // Journal of the Atmospheric Sciences, 2014. V. 71. N 11. P. 4382-4396.
- Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450. № 1. P. 112-136.

- Slyunyaev N.N., Kalinin A.V., Mareev E.A. Thunderstorm generators operating as voltage sources in global electric circuit models// Journal of Atmospheric and Solar-terrestrial Physics, 2019. V. 183. P. 99-109.

Иерархия квазистационарных приближений



Иерархия квазистационарных приближений I

- Degond P., Raviart P.-A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. Vol. 4. P. 13-44.
- Raviart P.-A., Sonnendrücker E. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 1996. V. 73. P. 329-372.
- Raviart P.-A., Sonnendrücker E. Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. Vol. 63. P. 69-81.
- Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. V. 75. N 3. P. 230-239.
- Krause T.B., Apte A., Morrison P. J. A unified approach to the Darwin approximation// Physics of Plasmas 2007. 14, 102112.
- Koch S., Schneider H., Weiland T. A low-frequency approximation to the Maxwell equations simultaneously considering inductive and capacitive phenomena// IEEE Trans. Magn. 2012, vol. 48, pp. 511-514.

Иерархия квазистационарных приближений II

- Clemens M., Kähne B., Schöps S. A Darwin Time Domain Scheme for the Simulation of Transient Quasistatic Electromagnetic Fields Including Resistive, Capacitive and Inductive Effects// arxiv.org/1909.1343.pdf, 2019.
- Калинин А.В., Тюхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах// ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С. 121-134.
- Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science, v.1413. Springer, 2021. P. 77-92.
- Калинин А.В., Тюхтина А.А. Некоторые математические задачи атмосферного электричества// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2022. Т. 207. С. 48-60.

Функциональные пространства

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшиц-непрерывной границей Γ , состоящей из компонент связности Γ_1, Γ_2 , гомеоморфных сферам в $\mathbb{R}^3$.

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\},$$

$$K(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{div}} = (\vec{u}, \vec{v})_{2, \Omega} + (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v})_{2, \Omega},$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},$$

$$K(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{rot}} = (\vec{u}, \vec{v})_{2, \Omega} + (\operatorname{rot} \vec{u}, \operatorname{rot} \vec{v})_{2, \Omega}.$$

$H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ – замыкание $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ и $H(\operatorname{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\operatorname{rot}; \Omega) = K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$,
 $K_0(\operatorname{div}; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$.

Функциональные пространства. Ортогональные разложения.

$$K(\Omega) = \{\vec{u} \in K(\operatorname{div}; \Omega) : \langle (\vec{u} \cdot \vec{\nu}, 1)_{\Gamma_i} = 0, i = 1, 2\},$$
$$H(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi(x) = 0, x \in \Gamma_1, \psi(x) = \operatorname{const}, x \in \Gamma_2\}.$$

Лемма 1

Для любой функции $\vec{u} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ найдется функция $p \in H^1(\Omega)$ такая, что $\vec{u} = \operatorname{grad} p$. Если $\vec{u} \in K_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, можно выбрать $p \in H(\Omega)$.

Лемма 2

$$K(\Omega) \equiv \operatorname{rot} H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v} : \vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)\}.$$

Лемма 3

Ортогональное дополнение к $K_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ совпадает с $K(\Omega)$.

Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \quad (35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\beta \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}. \quad (36)$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (37)$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \quad \vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), \quad x \in \Omega. \quad (38)$$

$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} - \operatorname{grad} \varphi$, $\vec{\mathcal{E}}(t) \in K(\Omega)$, $\varphi(t) \in H(\Omega)$, $t \in (0, T)$. Проектируя уравнение (35) на ортогональные подпространства, получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} P_{K(\Omega)}(\sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ext}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}, \quad (39)$$

$$0 = 4\pi P_{K_0(\operatorname{rot}; \Omega)}(\sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ext}}) - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi. \quad (40)$$

Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

Пусть $\vec{J}^{\text{ext}} = \vec{\mathcal{J}}^{\text{ext}} - \text{grad } \psi^{\text{ext}}$,

$\vec{\mathcal{J}}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, K(\Omega))$, $\psi^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H(\Omega))$, $\vec{e} = \vec{e}_0 - \text{grad } \varphi_0$, $\vec{e}_0 \in K(\Omega)$, $\varphi_0 \in H(\Omega)$.

Задача (35)–(38) разбивается на задачу определения функции $\varphi \in L_2(0, T, H(\Omega))$, такой что

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi + 4\pi\sigma \text{grad } \varphi = -4\pi \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \quad (41)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad (42)$$

и задачу определения функций

$\vec{H} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$, $\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, K(\Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega))$ таких что

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\mathcal{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}, \quad (43)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}, \quad (44)$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h}, \quad \vec{\mathcal{E}}(0) = \vec{e}_0. \quad (45)$$

Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

Квазистационарное электрическое приближение

$$\operatorname{grad} \varphi \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{rot}; \Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + 4\pi\sigma \operatorname{grad} \varphi = -4\pi \operatorname{grad} \psi^{\text{ext}},$$

$$\operatorname{grad} \varphi(0) = \operatorname{grad} \varphi_0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}}.$$

Квазистационарное магнитное приближение

$$\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, K(\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)), \quad \vec{H} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega)),$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\mathcal{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H},$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h},$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \psi^{\text{ext}}.$$

Квазистационарное приближение

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\mathcal{E}} - \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{\mathcal{E}} = 0, \\ \text{grad } \varphi(x, t) \times \vec{\nu}(x) &= 0, (x, t) \in \Gamma \times (0, T).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}.\end{aligned}\tag{46}$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, (x, t) \in \Gamma \times (0, T),\tag{47}$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \text{ grad } \varphi(x, 0) = \text{grad } \varphi_0(x), x \in \Omega.\tag{48}$$

¹Калинин А.В., Тюхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С.121-134.

Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

Квазистационарное приближение

$$\operatorname{grad} \varphi \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{rot}; \Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi + 4\pi\sigma \operatorname{grad} \varphi = -4\pi \operatorname{grad} \psi^{\text{ext}},$$

$$\operatorname{grad} \varphi(0) = \operatorname{grad} \varphi_0,$$

$$\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, K(\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)), \vec{H} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega)),$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\mathcal{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{\mathcal{J}}^{\text{ext}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H},$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\operatorname{grad} \varphi^n = \operatorname{grad} \varphi^e = \operatorname{grad} \varphi^d, \quad \vec{H}^d = \vec{H}^m, \quad \vec{\mathcal{E}}^m = \vec{\mathcal{E}}^d.$$

Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

Приближение Дарвина

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi, \quad (49)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (50)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (51)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (52)$$

Следствия уравнений (49)-(52):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{J}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

¹Degond P., Raviart P.-A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. Vol. 4. P. 13-44.

²Raviart P.-A., Sonnendrücker E. Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. Vol. 63. P. 69-81.

Иерархия квазистационарных приближений



Иерархия квазистационарных приближений

Предположим, выполнено условие согласования начальных данных

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{e} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}}(0), \operatorname{rot} \vec{e} = 0, \quad (53)$$

имеющее в безразмерных переменных вид

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \beta \gamma \sigma_0 \vec{e} + \beta \gamma \sigma_0 \vec{E}^{\text{ext}}(0), \operatorname{rot} \vec{e} = 0. \quad (54)$$

Тогда для решений рассматриваемых задач в однородных средах справедливы оценки

$$\|\vec{\mathcal{E}}^n - \vec{\mathcal{E}}^d\|_{2,Q} \leq \frac{1}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma T)) \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}, \quad (55)$$

$$\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} (1 - \exp(-\gamma T)) \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}, \quad (56)$$

$$\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\|_{L_2(0,T,H(\operatorname{rot};\Omega))} \leq 2(1+C(\Omega))^{1/2} \beta (1 - \exp(-\gamma T)) \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}. \quad (57)$$

Особенности решения задач в неоднородных средах

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное односвязное множество с регулярной границей Γ , $\vec{u} \in H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$ или $\vec{u} \in H(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Тогда справедливо неравенство

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega) (\|\text{div } \vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\text{rot } \vec{u}\|_{2,\Omega})$$

и $\vec{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3$.

Пусть

$$\text{rot } \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3, \quad \text{div } \vec{v} \in L_2(\Omega), \quad \vec{v} = \mu \vec{u}$$

$$[\vec{u}_\tau]|_{\bar{\Gamma}} = 0, \quad [v_n]|_{\bar{\Gamma}} = 0,$$

$$\mu \in L_\infty(\Omega) \quad \text{или} \quad \mu : \{L_2(\Omega)\}^3 \rightarrow \{L_2(\Omega)\}^3$$

$$\vec{u} \notin \{H^1(\Omega)\}^3, \quad \vec{v} \notin \{H^1(\Omega)\}^3$$

¹Weyl H. *The method of orthogonal projection in potential theory.* // Duke Math J. 1940;V. 7. P.411-444.

²Duvaut G, Lions J. *Inequalities on Mechanics and Physics.*– Berlin: Springer-Verlag; 1976.

Задачи для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах

- Теоремы о существовании и единственности решений начально-краевых задач
- Сравнение решений задач в зависимости от параметров β , γ , характеризующих скорость протекания электромагнитных процессов.
- Сравнение решений задач в зависимости от параметра, характеризующего степень неоднородности среды.

Обобщенная постановка задачи для квазистационарного электрического приближения

Найти функцию $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$, удовлетворяющую условию $\varphi(0) = \varphi_0$ и такую, что для всех $\psi \in H(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma \text{ grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 4\pi(\vec{J}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}. \quad (58)$$

Теорема 1

Для всех $\varphi_0 \in H(\Omega)$, $\vec{J}^{\text{ext}} \in \{L_2(Q)\}^3$ существует единственное решение $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$ задачи (58). При этом найдётся единственная функция $\vec{F} = \text{rot } \vec{H} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ такая, что справедливо равенство

$$\vec{F} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E},$$

где $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Если $\vec{J}^{\text{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, то $\partial^2 \varphi / \partial t^2 \in L_2(0, T, H(\Omega))$, то есть $\varphi \in C^1(0, T, H(\Omega))$ и $\vec{F} \in C(0, T, K(\Omega))$.

Обобщенная постановка задачи для квазистационарного магнитного приближения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}}, \quad (59)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}, \quad (60)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{\nu}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{H}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}) = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (61)$$

$$U_1(\Omega) = K(\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega), \quad U_2(\Omega) = K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

Найти функцию $\vec{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, такую, что

$$\vec{H}(0) = \vec{h} \quad (62)$$

и при всех $\vec{v} \in U_2(\Omega)$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{H}, \vec{v})_{2,\Omega} + \frac{c}{4\pi} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}, \operatorname{rot} \vec{v})_{2,\Omega} = (\sigma^{-1} \vec{E}^{\text{ext}}, \operatorname{rot} \vec{v})_{2,\Omega}. \quad (63)$$

Обобщенная постановка задачи для квазистационарного магнитного приближения

Пусть $\vec{J}^{\text{ext}} = \sigma \vec{E}^{\text{ext}}$

Теорема 2

Для всех $\vec{h} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\vec{E}^{\text{ext}} \in \{L_2(Q)\}^3$ существует единственное решение $\vec{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$ задачи (63). Если $\vec{h} \in U_2(\Omega)$ и $\vec{E}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$, то $\partial/\partial t \vec{H} \in \{L_2(Q)\}^3$. Если $\vec{E}^{\text{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\vec{h} \in U_2(\Omega)$ и

$$\frac{4\pi}{c} \vec{E}^{\text{ext}}(0) - \sigma^{-1} \text{rot } \vec{h} \in K_0(\text{rot}; \Omega), \quad (64)$$

то $\partial/\partial t \vec{H} \in L_\infty(0, T, K_0(\text{div}; \Omega))$.

¹ Калинин А.В., Калинкина А.А. Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 21-38.

Обобщенная постановка квазистационарной задачи

Пусть $\mu \equiv 1$, $\varepsilon \equiv 1$,

$$U_1(\Omega) = H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\Omega), \quad U_2(\Omega) = H(\text{rot}; \Omega) \cap K_0(\text{div } \Omega).$$

Найти $\vec{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\text{grad } \varphi \in L_2(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$, $\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, U_1(\Omega))$ такие, что для всех $\vec{u} \in U_2(\Omega)$, $\text{grad } \psi \in K_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \frac{4\pi}{c} (\sigma \vec{\mathcal{E}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \\ & + \frac{4\pi}{c} (\sigma \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{H}, \vec{u})_{2,\Omega} + (\vec{\mathcal{E}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = 0, \quad (66)$$

$$(\sigma \vec{\mathcal{E}}, \vec{v})_{2,\Omega} - (\sigma \text{grad } \varphi, \vec{v})_{2,\Omega} - \frac{c}{4\pi} (\vec{H}, \text{rot } \vec{v})_{2,\Omega} = -(\vec{J}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega}, \quad (67)$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h}, \quad \text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_0. \quad (68)$$

Обобщенная постановка квазистационарной задачи

Теорема 3

Для любых $\vec{h} \in U_2(\Omega)$, $\text{grad } \varphi_0 \in K_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{j}^{\text{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(Q)\}^3)$ существует единственное решение задачи (65), (68). При этом $\vec{H} \in L_\infty(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\partial/\partial t \vec{H} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\text{grad } \varphi \in H^1(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$. Если

$$\text{rot } \vec{h} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \text{grad } \varphi_0 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\text{ext}}(0), \quad (69)$$

то $\partial/\partial t \vec{H} \in L_\infty(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\partial/\partial t \text{grad } \varphi \in L_\infty(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$, $\partial/\partial t \vec{\mathcal{E}} \in \{L_2(Q)\}^3$.

¹ Калинин А.В., Тяхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С. 121-134.

² Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science, v.1413. Springer, 2021. P. 77-92.

Сравнение решений начально-краевых задач

Пусть $\text{grad}(\sigma_0) \in \{L_\infty(\Omega)\}^3$, $\sigma_0|_{\Gamma_2} = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|\text{grad } \varphi^n - \text{grad } \varphi^d\|_{2,Q} \leq \\ & \leq C_1 \|\text{grad } \sigma_0\|_{L_\infty(\Omega)} \frac{1}{\gamma} (1 - \exp(-a\gamma))^2 \left\| \partial/\partial t \vec{E}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}, \\ & \kappa \|\rho^n - \rho^d\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq \\ & \leq C_2 \|\text{grad } \sigma_0\|_{L_\infty(\Omega)} \frac{1}{\gamma} (1 - \exp\{-\gamma\sigma_0 T\})^2 \left\| \partial/\partial t \vec{E}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}, \\ & \|\vec{\mathcal{E}}^m - \vec{\mathcal{E}}^d\|_{2,Q} \leq \\ & \leq C_3 \|\text{grad } \sigma_0\|_{L_\infty(\Omega)} \frac{1}{\gamma} (1 - \exp(-a\gamma))^{1/2} \left\| \partial/\partial t \vec{E}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}, \\ & \|\vec{H}^m - \vec{H}^d\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leq \\ & \leq C_4 \|\text{grad } \sigma_0\|_{L_\infty(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (1 - \exp(-a\gamma))^{1/2} \left\| \partial/\partial t \vec{E}^{\text{ext}} \right\|_{2,Q}. \end{aligned}$$

Асимптотический анализ

Пусть $\sigma_0 = 1 + \eta\tilde{\sigma}$, $\|\operatorname{grad} \tilde{\sigma}\|_{\infty, \Omega} = 1$, $\|\tilde{\sigma}\|_{\infty, \Omega} \approx 1$.

Предполагаем, $\vec{E}^{\text{ext}} = \vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}} - \operatorname{grad} \psi^{\text{ext}}$ не зависит от η ,

$$\vec{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{h}_k, \quad \operatorname{grad} \varphi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \operatorname{grad} \varphi_{0k}.$$

$$\|\vec{h} - \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{h}_k\|_{2, \Omega} \leq C_N \eta^{N+1}, \quad \|\operatorname{grad} \varphi_0 - \sum_{k=0}^N \eta^k \operatorname{grad} \varphi_{0k}\|_{2, \Omega} \leq C_N \eta^{N+1}.$$

Получим разложения решений начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях по степеням η :

$$\vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{H}_k, \quad \operatorname{grad} \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \operatorname{grad} \varphi_k, \quad \vec{\mathcal{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{\mathcal{E}}_k.$$

Асимптотические разложения. Электрическое приближение

Для всех $\psi \in H(\Omega)$, $\vec{u} \in U_2(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma((1 + \eta\tilde{\sigma}) \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \\ & = -\gamma((1 + \eta\tilde{\sigma})(\text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma\eta(\tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot } \vec{H}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \varphi, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} + \\ & + \beta\gamma((1 + \eta\tilde{\sigma})\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} - \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_0. \quad (72)$$

Асимптотические разложения. Электрическое приближение

Подставляя в интегральные тождества

$$\vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{H}_k, \quad \text{grad } \varphi = \varphi^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta^k \text{grad } \varphi_k,$$

получаем $\varphi^0, \varphi_k \in H^1(0, T, H(\Omega))$, $k = 1, 2, \dots$, для всех $\psi \in H(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi^0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi^0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} =$$

$$= -\gamma(\text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega},$$

$$\varphi^0(0) = \varphi_{00},$$

$$\frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi_1, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi_1, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\tilde{\sigma} \text{grad } \varphi^0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} =$$

$$= -\gamma(\tilde{\sigma} \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\tilde{\sigma} \tilde{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega},$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_{01},$$

$$\frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi_k, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi_k, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\tilde{\sigma} \text{grad } \varphi_{k-1}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 0,$$

$$\varphi_k(0) = \varphi_{0k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Асимптотические разложения. Электрическое приближение

$$\vec{H}_k \in L_2(0, T, U_2(\Omega)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ для всех } \vec{u} \in U_2(\Omega)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{H}_0, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega} = \beta \gamma (\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega},$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{H}_1, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega} &= -\beta \gamma (\tilde{\sigma} \operatorname{grad} \varphi^0, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega} + \\ &+ \beta \gamma (\tilde{\sigma} \vec{E}^{\text{ext}}, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega}, \end{aligned}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{H}_k, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega} = -\beta \gamma (\tilde{\sigma} \operatorname{grad} \varphi_{k-1}, \operatorname{rot} \vec{u})_{2, \Omega}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Положим

$$\operatorname{grad} \varphi^N = \sum_{k=1}^N \eta^k \operatorname{grad} \varphi_k, \quad \vec{H}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{H}_k, \quad N = 1, 2, \dots$$

$$\|\operatorname{grad}(\varphi - \varphi^0)\|_{2, Q} \leq \eta (\|\tilde{\sigma}(\vec{E}^{\text{ext}} - \operatorname{grad} \varphi)\|_{2, Q}^2 + C_0^2 T)^{1/2} \leq \eta (A^2 + C_0^2 T)^{1/2},$$

$$\|\operatorname{grad}(\varphi - \varphi^N)\|_{2, Q} \leq \eta^{N+1} (A^2 + T(C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_N^2))^{1/2},$$

$$\|\operatorname{rot}(\vec{H} - \vec{H}^0)\|_{2, Q} \leq \beta \gamma \eta A,$$

$$\|\operatorname{rot}(\vec{H} - \vec{H}^N)\|_{2, Q} \leq \beta \gamma \eta^{N+1} (A^2 + T(C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_{N-1}^2))^{1/2} \quad N = 1, 2, \dots$$

Асимптотические разложения. Магнитное приближение

$$\vec{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega)), \vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, U_1(\Omega)), \varphi \in L_2(0, T, H(\Omega)), \\ \vec{E} = \vec{\mathcal{E}} - \text{grad } \varphi,$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h}.$$

Для всех $\psi \in H(\Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$, $\vec{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} & ((1 + \eta\tilde{\sigma}) \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \eta(\tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \\ & = \eta(\tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - ((1 + \eta\tilde{\sigma}) \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} & (\text{rot } \vec{H}, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma((1 + \eta\tilde{\sigma})\vec{\mathcal{E}}, \vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \varphi, \vec{v})_{2,\Omega} + \\ & + \beta\gamma((1 + \eta\tilde{\sigma})\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$(\vec{\mathcal{E}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}, \vec{u})_{2,\Omega}, \quad (75)$$

$$\vec{H}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{h}_k$$

Асимптотические разложения. Магнитное приближение

Подставляя разложения

$$\vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{H}_k, \quad \vec{\mathcal{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{\mathcal{E}}_k,$$

$$\text{grad } \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \text{grad } \varphi_k$$

в интегральные тождества, получаем задачи определения $\vec{H}_k \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\vec{\mathcal{E}}_k \in L_2(0, T, U_1(\Omega))$ и интегральные тождества для определения $\varphi_k \in L_2(0, T, H(\Omega))$, $k = 0, 1, \dots$.
Для всех $\psi \in H(\Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$, $\vec{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$(\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = -(\text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega},$$

$$(\text{rot } \vec{H}_0, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta \gamma (\vec{\mathcal{E}}_0, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta \gamma (\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega},$$

$$(\vec{\mathcal{E}}_0, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt} (\vec{H}_0, \vec{u})_{2,\Omega},$$

$$\vec{H}_0(0) = \vec{h}_0,$$

Асимптотические разложения. Магнитное приближение

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \varphi_1, \operatorname{grad} \psi)_{2,\Omega} &= (\tilde{\sigma}(\vec{E}^{\text{ext}} + \vec{E}_0), \operatorname{grad} \psi)_{2,\Omega}, \\(\operatorname{rot} \vec{H}_1, \vec{v})_{2,\Omega} &= \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\tilde{\sigma}(\vec{E}_0 + \vec{E}^{\text{ext}}), \vec{v})_{2,\Omega}, \\(\vec{\mathcal{E}}_1, \operatorname{rot} \vec{u})_{2,\Omega} &= -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}_1, \vec{u})_{2,\Omega}. \\ \vec{H}_1(0) &= \vec{h}_1, \\ \\(\operatorname{grad} \varphi_k, \operatorname{grad} \psi)_{2,\Omega} &= (\tilde{\sigma} \vec{E}_{k-1}, \operatorname{grad} \psi)_{2,\Omega}, \\(\operatorname{rot} \vec{H}_k, \vec{v})_{2,\Omega} &= \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}_k, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\tilde{\sigma} \vec{E}_{k-1}, \vec{v})_{2,\Omega}, \\(\vec{\mathcal{E}}_k, \operatorname{rot} \vec{u})_{2,\Omega} &= -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}_k, \vec{u})_{2,\Omega}. \\ \vec{H}_k(0) &= \vec{h}_k.\end{aligned}$$

Асимптотические разложения. Магнитное приближение

$$\vec{H}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{H}_k, \quad \vec{\mathcal{E}}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{\mathcal{E}}_k, \quad \text{grad } \varphi^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \text{grad } \varphi_k.$$

$$\|\text{grad}(\varphi - \varphi^N)\|_{2,Q} \leq \eta \|\tilde{\sigma}(\vec{E} - \vec{E}^{N-1})\|_{2,Q} \leq A\eta^{N+1}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

$$\|\vec{H} - \vec{H}^N\|_{2,\Omega} \leq \eta^{N+1} D_N, \quad N = 0, 1, \dots$$

$$\|\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}^N\|_{2,Q} \leq \eta^{N+1} D_N, \quad N = 0, 1, \dots$$

Асимптотические разложения. Квазистационарное приближение

Для всех $\psi \in H(\Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$, $\vec{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \gamma\eta(\tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma((1+\eta\tilde{\sigma}) \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \\ = \gamma\eta(\tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \gamma((1+\eta\tilde{\sigma}) \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{H}, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma((1+\eta\tilde{\sigma})\vec{\mathcal{E}}, \vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \varphi, \vec{v})_{2,\Omega} + \\ + \beta\gamma((1+\eta\tilde{\sigma})\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega} - \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma} \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$(\vec{\mathcal{E}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}, \vec{u})_{2,\Omega}, \quad (78)$$

$$\vec{H}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{h}_k, \quad \text{grad } \varphi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \text{grad } \varphi_{0k}. \quad (79)$$

Асимптотические разложения. Квазистационарное приближение

Подставляя разложения

$$\vec{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{H}_k, \quad \text{grad } \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \text{grad } \varphi_k, \quad \vec{\mathcal{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \vec{\mathcal{E}}_k.$$

в интегральные равенства, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \\ = -\gamma(\text{grad } \psi^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_{00}, \quad (81)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{H}_0, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}_0, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega}, \\ (\vec{\mathcal{E}}_0, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}_0, \vec{u})_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h}_0. \quad (83)$$

Асимптотические разложения. Квазистационарное приближение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi_1, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \gamma(\tilde{\sigma} \vec{E}_0, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi_1, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \\ = \gamma(\tilde{\sigma} \vec{E}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{H}_1, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\tilde{\sigma}(\vec{E}_1 + \vec{E}^{\text{ext}}), \vec{v})_{2,\Omega}, \\ (\vec{\mathcal{E}}_1, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}_1, \vec{u})_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\vec{H}_1(0) = \vec{h}_1, \quad \text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_{01}. \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi_k, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \gamma(\tilde{\sigma} \vec{E}_{k-1}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \gamma(\text{grad } \varphi_k, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (87)$$

$$(\text{rot } \vec{H}_k, \vec{v})_{2,\Omega} = \beta\gamma(\vec{\mathcal{E}}_k, \vec{v})_{2,\Omega} + \beta\gamma(\tilde{\sigma} \vec{E}_{k-1}, \vec{v})_{2,\Omega}, \quad (88)$$

$$(\vec{\mathcal{E}}_k, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = -\beta \frac{d}{dt}(\vec{H}_k, \vec{u})_{2,\Omega}, \quad (89)$$

$$\vec{H}_k(0) = \vec{h}_k, \quad \text{grad } \varphi_k(0) = \text{grad } \varphi_{0k}. \quad (90)$$

Асимптотические разложения. Квазистационарное приближение

$$\vec{H}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{H}_k, \quad \vec{\mathcal{E}}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \vec{\mathcal{E}}_k,$$

$$\text{grad } \varphi^N = \sum_{k=0}^N \eta^k \text{grad } \varphi_k.$$

$$\|\text{grad}(\varphi - \varphi^N)\|_{2,Q} \leq \eta^{N+1} K_N,$$

$$\|\vec{H} - \vec{H}^N\|_{2,\Omega} \leq \eta^{N+1} K_N, \quad \|\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}^N\|_{2,Q} \leq \eta^{N+1} K_N.$$

Спасибо за внимание!