

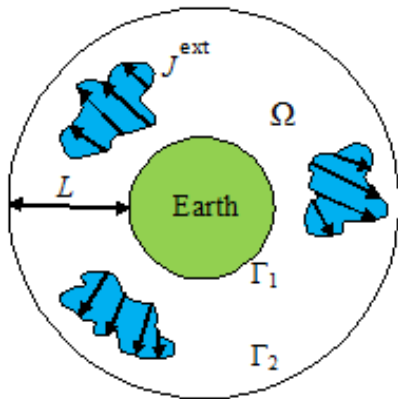
5 – 13 июля 2023 г.

Обратные задачи атмосферного электричества в квазистационарных приближениях

А.А. Тюхтина

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Глобальная электрическая цепь в атмосфере



$$L \sim 70 - 100 \text{ km},$$

$$\Delta U \sim 250 \text{ kV},$$

$$|\vec{j}^{\text{ext}}| \sim 1.10 \text{ nA/m}^2,$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 \exp(\alpha(|x| - R_E)).$$

$$\sigma_0 \sim 3 \cdot 10^{-14} \frac{1}{\text{Om} \cdot \text{m}},$$

$$\alpha \sim 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ 1/m},$$

$$R_E \approx 6370 \text{ km}.$$

¹Wilson T.R. *Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms* // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1921. V. 221. P. 73–115.

²Wilson T.R. *The electric field of a thundercloud and some of its effects* // Proc. Phys. Soc. London. 1924. V. 37. P. 32D–37D.

³Kalinin A.V., Mareev E.A., Zhidkov A.A. *Calculation of Different-Type Clouds in the Global Atmospheric Electric Circuit* // Proc. 14th Int. Conf. on Atmospheric Electricity, Rio de Janeiro, 2011.

Система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(x, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(x, t)}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(x, t)}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(x, t) = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(x, t) = 4\pi\rho(x, t).$$

$$\vec{D}(x, t) = \varepsilon(x) \vec{E}(x, t), \quad \vec{B}(x, t) = \mu(x) \vec{H}(x, t).$$

$$\vec{J}(x, t) = \sigma(x) \vec{E}(x, t) + \vec{J}^{\text{ext}}(x, t).$$

$$(x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad T > 0.$$

¹Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.

²Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◀ ≡ ▶ ≡ ◀ ≡ ▶ ≡

Начально-краевая задача

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H}.$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \quad \vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), \quad x \in \Omega.$$

Финальное наблюдение:

$$\vec{H}(x, T) = \vec{h}_T, \quad \vec{E}(x, T) = \vec{e}_T(x).$$

Граничное наблюдение:

$$\vec{E}(x, t) \cdot \vec{\nu}(x) = e_\nu, \quad x \in \Gamma.$$

Обратные задачи электромагнитной теории I

- Дмитриев В.И., Ильинский А.С., Свешников А.Г. Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики// УМН 1976. Т. 31. N 6. С. 123-141.
- Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П. Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1984.
- Isakov V. Inverse Source Problems. - Providence, RI: American Mathematical Society, 1990.
- Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
- Ola P., Paivarinta L., Somersalo E. An inverse boundary value problem in electrodynamics// Duke math. J. 1993. V. 70. P. 617-653.
- He S., Romanov V.G. Identification of dipole sources in a bounded domain for Maxwell's equations// Wave Motion, 1998. V. 28. P. 25-40.

Обратные задачи электромагнитной теории II

- Nicaise S. Exact boundary controllability of Maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem// SIAM J. Control Optim. 2000. V. 38, No. 4. P. 1145–1170
- Ammari H., Bao G., Fleming J.L. An inverse source problem for Maxwell's equations in magnetoencephalography// SIAM J. Appl. Math. 2002. V. 62. P. 1369-82.
- Li S., Yamamoto M. An inverse source problem for Maxwell's equations in anisotropic media// Applicable Analysis, 2005. 84:10, P. 1051-1067.
- Albanese R., Monk P.B. The inverse source problem for Maxwell's equations// Inverse Problems 2006. V. 22. P. 1023–1035.
- Li S., Yamamoto M. An inverse problem for Maxwell's equations in anisotropic media// Chin. Ann. Math. 2007. V 28B. No 1. P.35-54.
- Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. - М.: МАКС Пресс, 2008.

Обратные задачи электромагнитной теории III

- Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. - М.: Научный мир, 2010.
- Alonso Rodriguez A., Camano J., Valli A. Inverse source problems for eddy current equations// Inverse problems. 2012. V.28. 15 pp.
- Arnold L., Harrach B. Unique shape detection in transient eddy current problems// Inverse Problems. 2013. V.29. 19pp.
- Калинин А.В., Тюхтина А.А. О единственности решения ретроспективной обратной задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении// Вест. ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2014. N 4. С.263-270.
- Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Methods of dual regularization for solving inverse problems of quasistationary electromagnetic fields theory// Baswell A.R., ed. Advances in Mathematics Research. V.24. - New York: Nova Science Publishers, 2017. Ch.4. P. 59-124.

Обратные задачи электромагнитной теории IV

- Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 608-624.
- Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 18-40.

Задача линейно-выпуклого программирования

$$f(\Pi) \rightarrow \inf, F(\Pi) = q, \Pi \in D \subset V, q \in H, \quad (1)$$

H, V – гильбертовы пространства, $f : V \rightarrow R^1$ – непрерывный сильно выпуклый функционал, $F : V \rightarrow H$ – линейный непрерывный оператор, $D \subset V$ – выпуклое замкнутое множество.

Пусть $\Pi_0 \in D$ – решение задачи (1).

Минимизирующее приближенное решение – последовательность $\Pi_n \in D, n = 1, 2, \dots,$

$$f(\Pi_n) \leq f(\Pi_0) + \delta_n, \|F(\Pi_n) - q\|_H \leq \gamma_n, \delta_n \rightarrow 0, \gamma_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

¹Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

Алгоритм Удзавы

Функционал Лагранжа

$$L(\Pi, \lambda) \equiv f(\Pi) + (\lambda, F(\Pi) - q)_H, \quad \Pi \in D \subset V, \quad \lambda \in H.$$

Двойственная задача –

$$V(\lambda) \rightarrow \sup, \quad V(\lambda) = \min_{\Pi \in D} L(\Pi, \lambda), \quad \lambda \in H.$$

$$\Pi(\lambda) = \operatorname{argmin} L(\Pi, \lambda), \quad \Pi \in D.$$

Производная в смысле Фреше функционала V в точке $\lambda \in H$ равна

$$\partial V(\lambda) = F(\Pi(\lambda)) - q.$$

Эта производная удовлетворяет условию Липшица.

$$\lambda_1 \in H, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \beta_n (F(\Pi(\lambda_n)) - q). \quad (2)$$

¹ Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию // М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.

Метод двойственной регуляризации

Семейство задач, зависящих от ошибки наблюдения:

$$f^\delta(\Pi) \rightarrow \inf, F^\delta(\Pi) = q^\delta, \Pi \in D \subset V, q^\delta \in H, \\ \|F - F^\delta\| \leq C\delta, \|q^\delta - q\|_H \leq C\delta, |f^\delta(\Pi) - f(\Pi)| \leq C\delta(1 + \|\Pi\|), \Pi \in D.$$

Функционал Лагранжа

$$L^\delta(\Pi, \lambda) \equiv f^\delta(\Pi) + (\lambda, F^\delta(\Pi) - q^\delta)_H, \Pi \in D, \lambda \in H.$$

Двойственный функционал

$$V^\delta(\lambda) = \inf_{\Pi \in D} L^\delta(\Pi, \lambda), \lambda \in H.$$

$$\Pi^\delta(\lambda) = \operatorname{argmin}_{\Pi \in D} L^\delta(\Pi, \lambda), V^\delta(\lambda) = L^\delta(\Pi^\delta(\lambda), \lambda).$$

$$\partial V^\delta(\lambda) = F^\delta(\Pi^\delta(\lambda)) - q^\delta.$$

Метод двойственной регуляризации

При фиксированном значении параметра регуляризации α рассматривается задача

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \alpha \|\vec{\lambda}\|_H^2 \rightarrow \max, \lambda \in H. \quad (3)$$

Пусть $\lambda^{\delta,\alpha}$ – единственное решение задачи (3).

Теорема 1

Пусть $\delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Тогда при $\delta \rightarrow 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|F(\Pi^\delta(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)})) - q\|_H &\rightarrow 0, \quad f(\Pi^\delta(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)})) \rightarrow f(\Pi_0), \\ \|\Pi^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}] - \Pi_0\|_V &\rightarrow 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} V(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}) = \sup_{\lambda \in H} V(\lambda) = f(\Pi_0). \end{aligned}$$

В случае разрешимости двойственной задачи $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)} \rightarrow \lambda_0$, где $\lambda_0 \in H$ – решение двойственной задачи, имеющее минимальную норму.

Итеративная двойственная регуляризация

Последовательность γ_k , $k = 1, 2, \dots$, конструируется по правилу

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} &= \gamma_k + \beta_k \partial V^{\delta_k}(\gamma_k) - 2\beta_k \alpha_k \gamma_k = \\ &= (1 - 2\beta_k \alpha_k) \gamma_k + \beta_k (F^{\delta_k}(\Pi^{\delta_k}(\gamma_k)) - q^{\delta_k}), \quad k = 1, 2, \dots, \gamma_1 \in H, \quad (4)\end{aligned}$$

последовательности $\delta_k, \alpha_k, \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям

$$\delta^k \geq 0, \alpha^k > 0, \beta^k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0, \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leq C_0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{(\alpha_k)^3 \beta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{(\alpha_k)^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_k}{(\alpha_k)^3} = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k = +\infty. \quad (5)$$

Пример: $\alpha_k = k^{-1/6}$, $\beta_k = k^{-3/5}$.

Итеративная двойственная регуляризация

Теорема 2

Пусть Π_0 - решение задачи и выполняются условия согласования (5). Тогда при $k \rightarrow \infty$

$$f(\Pi^{\delta_k}(\gamma_k)) \rightarrow f(\Pi_0), \quad F(\Pi^{\delta_k}(\gamma_k)) - q \rightarrow 0,$$

$$(\gamma_k, F^{\delta_k}(\Pi^{\delta_k}(\gamma_k)) - q^{\delta_k})_H \rightarrow 0.$$

Одновременно справедливы соотношения

$$f(\Pi^0(\gamma_k)) \rightarrow f(\Pi_0), \quad (\gamma_k, F(\Pi^0(\gamma_k)) - q)_H \rightarrow 0$$

$$\lim_{\delta_k \rightarrow +0} V(\gamma_k) = \sup_{\lambda \in H} V(\lambda) = f(\Pi_0),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Pi^{\delta_k}(\gamma_k) - \Pi_0\| = 0.$$

В случае разрешимости двойственной задачи $\gamma_k \rightarrow \lambda_0$, где $\lambda_0 \in H$ – решение двойственной задачи, имеющее минимальную норму.

- Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения// ЖВМ и МФ 2004. Т.44. N. 11. С. 2001-2019.
- Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве// ЖИМ и МФ 2011. Т.51. N 9. С.1594-1615.
- Сумин М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач// ЖВМ и МФ 2014. Т.54. N 1. С.25-49.
- Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Methods of dual regularization for solving inverse problems of quasistationary electromagnetic fields theory// Baswell A.R., ed. Advances in Mathematics Research. V.24. - New York: Nova Science Publishers, 2017. Ch.4. P. 59-124.

Задача для системы уравнений Максвелла в электрическом приближении

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшиц-непрерывной границей Γ , состоящей из компонент связности Γ_1, Γ_2 , гомеоморфных сферам в $\mathbb{R}^3$.

$\varepsilon \equiv 1, \sigma \in L_\infty(\Omega), \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2, x \in \Omega$.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \vec{E}(x, 0) = \vec{e}(x), x \in \Omega.$$

Задача в терминах скалярного электрического потенциала

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (-\sigma \operatorname{grad} \varphi + \vec{J}^{\text{ext}}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi, \quad (6)$$

$$\varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_1} = 0 \quad \varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_2} = u(t),$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), x \in \Omega.$$

Задача для системы уравнений Максвелла в электрическом приближении

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + 4\pi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 4\pi \operatorname{div} \vec{J}^{\text{ext}}, \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma_2} ((\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi \sigma \operatorname{grad} \varphi) - 4\pi \vec{J}^{\text{ext}}) \cdot \vec{\nu} d\gamma = 0, \quad (8)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

$$\varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_1} = 0, \quad \varphi(x, t)|_{x \in \Gamma_2} = u(t), \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

$$u(0) = \varphi_0|_{\Gamma_2}.$$

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\},$$

$$K(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{div}} = (\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{v})_{2,\Omega},$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \operatorname{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},$$

$$K(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \operatorname{rot} \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{rot}} = (\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{rot} \vec{u}, \operatorname{rot} \vec{v})_{2,\Omega}.$$

$H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ – замыкание $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ и $H(\operatorname{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\operatorname{rot}; \Omega) = K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$,
 $K_0(\operatorname{div}; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$.

Функциональные пространства

$$\begin{aligned} K(\Omega) &= \{\vec{u} \in K(\operatorname{div}; \Omega) : \langle \gamma_\nu \vec{u}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \ i = 1, 2\}, \\ H(\Omega) &= \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi(x) = 0, \ x \in \Gamma_1, \ \psi(x) = \text{const}, \ x \in \Gamma_2\}. \\ U_1(\Omega) &= K(\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega), \ U_2(\Omega) = K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega). \end{aligned}$$

Лемма 1

Для любой функции $\vec{u} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ найдется функция $p \in H^1(\Omega)$ такая, что $\vec{u} = \operatorname{grad} p$. Если $\vec{u} \in K_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, можно выбрать $p \in H(\Omega)$.

Лемма 2

$$K(\Omega) \equiv \operatorname{rot} H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v} : \vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)\}.$$

Лемма 3

Ортогональное дополнение к $K_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ совпадает с $K(\Omega)$.

Обобщенная постановка задачи для нерелятивистского электрического приближения

Найти функцию $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$, удовлетворяющую условию $\text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_0$ и такую, что для всех $\psi \in H(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma \text{ grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 4\pi(\vec{J}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega}. \quad (11)$$

Теорема 3

Для всех $\varphi_0 \in H(\Omega)$, $\vec{J}^{\text{ext}} \in \{L_2(Q)\}^3$ существует единственное решение $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$ задачи (11). При этом найдётся единственная функция $\vec{F} = \text{rot } \vec{H} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ такая, что

$$c\vec{F} = 4\pi\sigma\vec{E} + 4\pi\vec{J}^{\text{ext}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E},$$

где $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Если $\Delta\varphi_0 \in L_2(\Omega)$, $\vec{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega))$, $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})$, то $\vec{E} \in H^1(0, T, \{H^1(\Omega)\}^3)$.

¹Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 450. No. 1. P. 112-136.

Задача граничного наблюдения

$$\bar{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega)), \quad \sigma \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Прямая задача: найти функцию $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$ такую, что $\varphi(x, 0) = 0$, $x \in \Omega$, и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2, \Omega} + 4\pi(\sigma \text{ grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2, \Omega} = \\ = -4\pi(\text{div } \bar{J}^{\text{ext}}, \psi)_{2, \Omega} + 4\pi\psi_{\Gamma_2} \langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} \end{aligned} \quad (12)$$

для всех $\psi \in H(\Omega)$. Определена нормальная компонента вектора $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ на границе области.

$$\gamma_\nu \vec{E}(x, t) = (\vec{E}(x, t) \cdot \vec{\nu})(x) = e_\nu(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad e_\nu \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)).$$

Задача граничного наблюдения

Найти $\operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, L_2(\Omega))$, $\langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} \in L_2(0, T)$, удовлетворяющие (12), при условии, что

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{x \in \Gamma_1} = -e_\nu \in L_2(0, T, L_2(\Gamma_1)).$$

$$\begin{aligned} \bar{J}^{\text{ext}} &= \bar{J}_1^{\text{ext}} + \bar{J}_2^{\text{ext}}, \quad \bar{J}_1^{\text{ext}} \in L_2(0, T, K(\Omega)), \quad \bar{J}_2^{\text{ext}} \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{rot}; \Omega)), \\ (\bar{J}_2^{\text{ext}}, \operatorname{grad} \psi)_{2, \Omega} &= -(\operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}}, \psi)_{2, \Omega} + \psi_{\Gamma_2} \langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}, \quad \psi \in H(\Omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $V = L_2(0, T, L_2(\Omega)) \times L_2(0, T)$,
 $\Pi = (\operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}}, \langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}) \in V$, $\varphi[\Pi]$ – решение задачи (12) с данными Π ,

$$F : V \rightarrow L_2(0, T, L_2(\Gamma_1)), \quad F(\Pi) \equiv \partial \varphi[\Pi] / \partial \nu|_{\Gamma_1}, \quad \Pi \in V.$$

Задача граничного наблюдения

$$\|\operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}}\|_{2,Q}^2 + \|\langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}\|_{2,(0,T)}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\Pi) = -e_\nu, \quad (14)$$

$$\Pi \in V, \quad e_\nu \in L_2(0, T, L_2(\Gamma_1)).$$

Семейство задач, зависящих от ошибки δ

$$\|e_\nu - e_\nu^\delta\|_{2,(0,T) \times \Gamma_1} \leq \delta, \quad \|\sigma - \sigma^\delta\|_{\infty, \Omega} \leq \delta, \quad \|\operatorname{grad}(\sigma - \sigma^\delta)\|_{\infty, \Omega} \leq \delta,$$

$$\delta \in [0, \delta_0], \quad \delta_0 > 0.$$

$\varphi^\delta[\Pi]$ – решение задачи (12), где σ заменено на σ^δ , $F^\delta(\Pi) = \partial \varphi^\delta[\Pi] / \partial \nu|_{\Gamma_1}$.

$$\|F - F^\delta\| \leq C\delta.$$

$$\|\Pi\|^2 \rightarrow \inf, \quad F^\delta(\Pi) = -e_\nu^\delta, \quad \Pi \in V, \quad \vec{e}_\nu^\delta \in L_2(0, T, L_2(\Gamma_1)).$$

Случай $\delta = 0$ соответствует точному заданию e_ν, σ .

Сопряженная задача

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta \eta + 4\pi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \eta) = 0, \quad (15)$$

$$\eta|_{x \in \Gamma_1} = \tilde{\eta}(x, t), \quad \eta|_{x \in \Gamma_2} = C(t), \quad \int_{\Gamma_2} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} + 4\pi \sigma \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\right) d\gamma = 0, \quad (16)$$

$$\eta(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

Обобщенная постановка сопряженной задачи.

Пусть $\tilde{\eta} \in H^1(0, T, H^{1/2}(\Gamma))$, $v \in H^1(0, T, H^1(\Omega))$, $v|_{\Gamma_1} = \tilde{\eta}$, $v|_{\Gamma_2} = 0$, $v(T) = 0$. Найти $u = \eta - v \in L_2(0, T, H(\Omega))$ такую, что $u(T) = 0$ и для всех $\psi \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \psi)_{2, \Omega} + 4\pi (\sigma \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \psi)_{2, \Omega} = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} v - 4\pi \sigma \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \psi \right)_{2, \Omega}. \end{aligned}$$

Сопряженный оператор

Пусть φ, η – решения прямой и сопряженной задачи соответственно.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - 4\pi \sigma(x) \tilde{\eta} \right) d\gamma dt = \\ & = 4\pi \int_0^T \langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} C(t) dx dt - 4\pi \int_Q \operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}} \cdot \eta dx dt. \end{aligned}$$

$(F^\delta)^* : L_2(0, T, L_2(\Gamma_1)) \rightarrow V^*$, $\langle (F^\delta)^*(\lambda), \Pi \rangle = (\lambda, \frac{\partial}{\partial \nu} \varphi^\delta[\Pi])_{2, \Gamma_1}$ Пусть

$$\tilde{\eta}(x, t) = - \int_t^T \lambda(x, \tau) e^{4\pi \sigma(t-\tau)} d\tau,$$

$\lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1))$, $\eta^\delta[\lambda]$ – решение задачи (15)-(17) при $\sigma = \sigma^\delta$.

$$\begin{aligned} & \langle (F^\delta)^*(\lambda), \Pi \rangle = \\ & = 4\pi \int_0^T \langle \gamma_\nu \bar{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} \eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2} dt - 4\pi \int_Q \operatorname{div} \bar{J}^{\text{ext}} \cdot \eta^\delta[\lambda] dx dt, \\ & (F^\delta)^*(\lambda) = (-4\pi \eta^\delta[\lambda], 4\pi \eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}). \end{aligned}$$

Сопряженный оператор

$$\tilde{H}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi(x) = \text{const}, x \in \Gamma_2\}.$$

$$U = \{\eta \in H^1(0, T, \tilde{H}(\Omega)) :$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \eta + 4\pi\sigma \text{grad } \eta \in L_2(0, T, K(\Omega)), \eta(T) = 0\}.$$

Пусть W – замыкание в V множества $\{(-\eta, \eta|_{\Gamma_2})\}$.

$$V = W + W^\perp.$$

$$\xi \in \mathcal{D}(Q), (\text{div}(\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \xi + 4\pi\sigma \text{grad } \xi), 0) \in W^\perp.$$

Лемма 4

Решение задачи граничного наблюдения $\Pi \in W$ единственно. Если $\Pi \in W^\perp$, то $F(\Pi) = 0$.

Двойственные алгоритмы

Функционал Лагранжа имеет вид

$$L^\delta(\Pi, \lambda) \equiv \|\Pi\|^2 + (\lambda, \frac{\partial}{\partial \nu} \varphi^\delta[\Pi] + e_\nu^\delta)_{2, (0, T) \times \Gamma_1}, \quad \Pi \in V, \quad \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1))$$

двойственная задача –

$$V^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad V^\delta(\lambda) = \min_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \lambda), \quad \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)). \quad (18)$$

$$\Pi^\delta(\lambda) = -1/2(F^\delta)^*(\lambda) = (2\pi\eta^\delta[\lambda], -2\pi\eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}).$$

$$V^\delta(\lambda) = -1/4\|(F^\delta)^*(\lambda)\|_V^2 + (\bar{e}_\nu^\delta, \lambda)_{2, (0, T) \times \Gamma_1}.$$

Двойственные алгоритмы

Алгоритм Удзавы

$$\lambda_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi(\lambda_n) = \{2\pi\eta[\lambda_n], -2\pi\eta[\lambda_n]|_{\Gamma_2}\},$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \beta_n \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \varphi[\Pi_n] + e_\nu \right).$$

Итеративная двойственная регуляризация

$$\gamma_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi^{\delta_n}(\gamma_n) = \{2\pi\eta^{\delta_n}[\gamma_n], -2\pi\eta^{\delta_n}[\gamma_n]|_{\Gamma_2}\},$$

$$\gamma_{n+1} = (1 - 2\beta_n\alpha_n)\gamma_n + \beta_n \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \varphi^{\delta_n}[\Pi_n] + e_\nu^{\delta_n} \right).$$

Квазистационарное приближение

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\mathcal{E}} - \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{\mathcal{E}} = 0, \\ \text{grad } \varphi(x, t) \times \vec{\nu}(x) &= 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T).\end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{ext}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi,$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H}.$$

$$\vec{E}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T),$$

$$\vec{H}(x, 0) = \vec{h}(x), \text{ grad } \varphi(x, 0) = \text{grad } \varphi_0(x), x \in \Omega.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + 4\pi \text{div}(\sigma \text{grad } \varphi) - 4\pi \text{div } \sigma \vec{\mathcal{E}} = 4\pi \text{div } \vec{J}^{\text{ext}}.$$

Обобщенная постановка квазистационарной задачи

Найти $\vec{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\text{grad } \varphi \in L_2(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$,
 $\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, U_1(\Omega))$ такие, что для всех $\vec{u} \in U_2(\Omega)$,
 $\text{grad } \psi \in K_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \frac{4\pi}{c} (\sigma \vec{\mathcal{E}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \quad (19)$$

$$+ \frac{4\pi}{c} (\sigma \text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2,\Omega},$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{H}, \vec{u})_{2,\Omega} + (\vec{\mathcal{E}}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = 0, \quad (20)$$

$$(\sigma \vec{\mathcal{E}}, \vec{v})_{2,\Omega} - (\sigma \text{grad } \varphi, \vec{v})_{2,\Omega} - \frac{c}{4\pi} (\vec{H}, \text{rot } \vec{v})_{2,\Omega} = -(\vec{J}^{\text{ext}}, \vec{v})_{2,\Omega}, \quad (21)$$

$$\vec{H}(0) = \vec{h}, \text{grad } \varphi(0) = \text{grad } \varphi_0. \quad (22)$$

Обобщенная постановка квазистационарной задачи

Теорема 4

Для любых $\vec{h} \in U_2(\Omega)$, $\text{grad } \varphi_0 \in K_0(\text{rot}; \Omega)$,
 $\vec{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ существует единственное решение
 $\vec{H} \in L_\infty(0, T, U_2(\Omega))$, $\text{grad } \varphi \in L_\infty(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$,
 $\vec{E} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ задачи (19)-(22). При этом
 $\text{grad } \varphi \in H^1(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$.
Если $\vec{J}^{\text{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, то $\partial/\partial t \vec{H} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$,
 $\vec{E} \in L_2(0, T, U_1(\Omega)) \cap L_\infty(0, T, K(\Omega))$.
Если $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\vec{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega))$, то
 $\vec{E} \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega))$.

¹Калинин А.В., Тюхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С. 121-134.

¹Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Hierarchy of Models of Quasi-stationary Electromagnetic Fields // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 20th International Conference, MMST 2020, Nizhny Novgorod, Russia, November 23 - 27, 2020, Revised Selected Papers. Communications in Computer and Information Science, v.1413. Springer, 2021. P. 77-92.

Задача граничного наблюдения

$$\vec{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega)), \sigma \in C^1(\bar{\Omega}).$$

$$\vec{J}^{\text{ext}} = \vec{J} - \text{grad } \psi^{\text{ext}}, \vec{J} \in L_2(0, T, K(\Omega)), \psi^{\text{ext}} \in H^1(0, T, H(\Omega)).$$

Прямая задача: найти функции $\vec{H} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\text{grad } \varphi \in L_2(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega))$ и $\vec{\mathcal{E}} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ такие, что $\vec{H}(0) = 0$, $\text{grad } \varphi(0) = 0$ и для всех $\vec{u} \in U_2(\Omega)$, $\text{grad } \psi \in K_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)_{2, \Omega} - 4\pi(\sigma \vec{E}, \text{grad } \psi)_{2, \Omega} = \\ & = -4\pi(\text{div } \vec{J}^{\text{ext}}, \psi)_{2, \Omega} + 4\pi\psi_{\gamma_2} \langle \gamma_\nu \vec{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}, \vec{u})_{2, \Omega} + c(\vec{\mathcal{E}}, \text{rot } \vec{u})_{2, \Omega} = 0, \quad (24)$$

$$(\sigma \vec{\mathcal{E}}, \vec{v})_{2, \Omega} - (\sigma \text{grad } \varphi, \vec{v})_{2, \Omega} - \frac{c}{4\pi}(\vec{H}, \text{rot } \vec{v})_{2, \Omega} = -(\vec{J}, \vec{v})_{2, \Omega}. \quad (25)$$

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} - \text{grad } \varphi \in L_2(0, T, H(\text{div}; \Omega)),$$

$$\gamma_\nu \vec{E}(x, t) = (\vec{E}(x, t) \cdot \vec{\nu})(x) = e_\nu(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad e_\nu \in L_2(0, T, H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

Задача граничного наблюдения

Найти $\operatorname{div} \vec{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, L_2(\Omega))$, $\langle \gamma_\nu \vec{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} \in L_2(0, T)$, $\vec{J} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ при условии, что

$$(\vec{E} \cdot \vec{\nu})|_{x \in \Gamma_1} = e_\nu \in L_2(0, T, H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

$V = L_2(0, T, L_2(\Omega)) \times L_2(0, T) \times L_2(0, T, K(\Omega))$,
 $H = L_2(0, T, H^{-1/2}(\Gamma_1))$, $\Pi = (\operatorname{div} \vec{J}^{\text{ext}}, \langle \gamma_\nu \vec{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}, \vec{J}) \in V$,
 $\{\vec{H}[\Pi], \operatorname{grad} \varphi[\Pi], \vec{\mathcal{E}}[\Pi]\}$ – решение задачи (12) с данными Π .

$$F : V \rightarrow H, \quad F(\Pi) \equiv \gamma_\nu \vec{E}[\Pi]|_{\Gamma_1}, \quad \Pi \in V.$$

$$\|\operatorname{div} \vec{J}^{\text{ext}}\|_{2,Q}^2 + \|\langle \gamma_\nu \vec{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2}\|_{2,(0,T)}^2 + \|\vec{J}\|_{2,Q}^2 \rightarrow \inf, \quad (26)$$

$$F(\Pi) = e_\nu, \quad \Pi \in V, \quad e_\nu \in H.$$

Сопряженная задача

$$\operatorname{rot} \vec{M}(x, t) = -\frac{4\pi}{c} \sigma(x) (\vec{Y}(x, t) - \operatorname{grad} \eta(x, t)) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \eta(x, t), \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} \vec{Y}(x, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{M}(x, t), \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \vec{Y} = 0. \quad (29)$$

$$\vec{Y}(x, t) \times \vec{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad \int_{\Gamma_i} (\vec{Y} \cdot \vec{\nu}) d\gamma = 0, \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta}(x, t), \quad x \in \Gamma_1, \quad \eta(x, t) = C_\eta, \quad x \in \Gamma_2, \quad t \in (0, T), \quad (31)$$

$$\vec{M}(x, T) = 0, \quad \operatorname{grad} \eta(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (32)$$

Сопряженная задача

Обобщенное решение задачи (27)-(32) – функции $\vec{M} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\eta \in H^1(0, T, \tilde{H}(\Omega))$ и $\vec{Y} \in L_2(0, T, K(\Omega))$ такие, что для всех $\vec{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\text{grad } \psi \in K_0(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\text{grad } \eta, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + \frac{4\pi}{c} (\sigma(\vec{Y} - \text{grad } \eta, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\mu \vec{M}, \vec{u})_{2,\Omega} + (\vec{Y}, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} = 0, \quad (34)$$

$$4\pi(\sigma \vec{Y}, \vec{v})_{2,\Omega} - 4\pi(\sigma \text{grad } \eta, \vec{v})_{2,\Omega} + c(\vec{M}, \text{rot } \vec{v})_{2,\Omega} + \frac{d}{dt} \langle \gamma_\nu \vec{v}, \tilde{\eta} \rangle_{\Gamma_1} = 0 \quad (35)$$

и справедливы условия (32).

Теорема 5

Пусть $\tilde{\eta} \in H^1(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1))$, $\tilde{\eta}(T) = 0$. Существует единственное обобщенное решение задачи (27)-(32).

Сопряженный оператор

Пусть $\vec{H}$, $\text{grad } \varphi$, $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{M}$, η , $\vec{Y}$ – решения прямой и сопряженной задач соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \gamma_\nu \vec{E}, \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\eta} - 4\pi\sigma\tilde{\eta} \rangle_{\Gamma_1} dt = \\ & = 4\pi \int_0^T C_\eta \langle \gamma_\nu \vec{J}^{\text{ext}}, 1 \rangle_{\Gamma_2} dt + 4\pi(\text{div } \vec{J}^{\text{ext}}, \eta)_{2,Q} + 4\pi(\vec{\mathcal{J}}, \vec{Y})_{2,Q}. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть $\lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1))$. Определим $\tilde{\eta} \in H^1(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1))$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\eta} - 4\pi\sigma\tilde{\eta} = \lambda, \quad \tilde{\eta}(T) = 0, \quad \tilde{\eta}(t) = - \int_t^T e^{4\pi\sigma(t-\tau)} \lambda(\tau) d\tau.$$

$$F^* : H^* \rightarrow V^*, \quad \langle F^*(\lambda), \Pi \rangle = \langle \lambda, F(\Pi) \rangle, \quad \lambda \in H^*, \quad \Pi \in V.$$

$$F^*(\lambda) = 4\pi(\eta[\lambda], \eta[\lambda]|_{\Gamma_2}, \vec{V}[\lambda]) \in V, \quad (37)$$

$\vec{M}[\lambda]$, $\vec{V}[\lambda]$, $\eta[\lambda]$ – решение задачи (27)–(32)

Семейство задач, зависящих от ошибки наблюдения

$$\|e_\nu - e_\nu^\delta\|_{L_2(0,T,H^{-1/2}(\Gamma_1))} \leq \delta, \quad \|\sigma - \sigma^\delta\|_{\infty,\Omega} \leq \delta, \quad \|\operatorname{grad}(\sigma - \sigma^\delta)\|_{\infty,\Omega} \leq \delta, \\ \delta \in [0, \delta_0], \quad \delta_0 > 0.$$

$\vec{H}^\delta[\Pi]$, $\varphi^\delta[\Pi]$, $\vec{\mathcal{E}}^\delta[\Pi]$ – решение задачи прямой задачи, где σ заменено на σ^δ , $\vec{E}^\delta[\Pi] = \vec{\mathcal{E}}^\delta[\Pi] - \varphi^\delta[\Pi]$, $F^\delta(\Pi) = \gamma_\nu \vec{E}^\delta|_{\Gamma_1}$,

$$\|F - F^\delta\| \leq C\delta.$$

$$\|\Pi\|^2 \rightarrow \inf, \quad F^\delta(\Pi) = e_\nu^\delta, \quad \Pi \in V, \quad \vec{e}_\nu^\delta \in L_2(0,T,H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

$$(F^\delta)^* : L_2(0,T,H^{1/2}(\Gamma_1)) \rightarrow V^*,$$

$$(F^\delta)^*(\lambda) = 4\pi(\eta^\delta[\lambda], \eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}, \vec{Y}^\delta[\lambda]) \in V,$$

$\vec{M}^\delta[\lambda]$, $\eta^\delta[\lambda]$, $\vec{Y}^\delta[\lambda]$ – решение соответствующей сопряженной задачи.

Случай $\delta = 0$ соответствует точному заданию e_ν, σ .

Двойственные алгоритмы

Функционал Лагранжа имеет вид

$$L^\delta(\Pi, \lambda) \equiv \|\Pi\|^2 + \int_0^T \langle \lambda, \gamma_\nu \vec{E}^\delta[\Pi] - e_\nu^\delta \rangle_{\Gamma_1} dt,$$

$$\Pi \in V, \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

двойственная задача –

$$V^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad V^\delta(\lambda) = \min_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \lambda), \quad \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)). \quad (38)$$

$$\Pi^\delta(\lambda) = -1/2(F^\delta)^*(\lambda) = -2\pi(\eta^\delta[\lambda], \eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}, \vec{Y}^\delta[\lambda]).$$

Двойственные алгоритмы

Алгоритм Удзавы

$$\lambda_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi(\lambda_n) = -2\pi(\eta[\lambda], \eta[\lambda]|_{\Gamma_2}, \vec{Y}[\lambda]),$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \beta_n(\gamma_\nu \vec{E}[\Pi_n]|_{\Gamma_1} - e_\nu).$$

Итеративная двойственная регуляризация

$$\gamma_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi^{\delta_n}(\gamma_n) = -2\pi(\eta^\delta[\lambda], \eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}, \vec{Y}^\delta[\lambda]),$$

$$\gamma_{n+1} = (1 - 2\beta_n\alpha_n)\gamma_n + \beta_n(\gamma_\nu \vec{E}^{\delta_n}[\Pi_n]|_{\Gamma_1} - e_\nu^{\delta_n}).$$

Задача граничного наблюдения

Функционал Лагранжа имеет вид

$$L^\delta(\Pi, \lambda) \equiv \|\Pi\|^2 + (\lambda, \frac{\partial}{\partial \nu} \varphi^\delta[\Pi] + e_\nu^\delta)_{2, \Gamma_1}, \quad \Pi \in V, \quad \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

двойственная задача –

$$V^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad V^\delta(\lambda) = \min_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \lambda), \quad \lambda \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)). \quad (39)$$

$$\Pi^\delta(\lambda) = -1/2(F^\delta)^*(\lambda) = (2\pi\eta^\delta[\lambda], -2\pi\eta^\delta[\lambda]|_{\Gamma_2}).$$

$$V^\delta(\lambda) = -1/4\|(F^\delta)^*(\lambda)\|_V^2 + (\bar{e}_\nu^\delta, \lambda)_{2, \Gamma_1}.$$

Двойственные алгоритмы

Алгоритм Удзавы

$$\lambda_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi(\lambda_n) = \{2\pi\eta[\lambda_n], -2\pi\eta[\lambda_n]|_{\Gamma_2}\},$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \beta_n \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \varphi[\Pi_n] + e_\nu \right).$$

Итеративная двойственная регуляризация

$$\gamma_1 \in L_2(0, T, H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

$$\Pi_n = \Pi^{\delta_n}(\gamma_n) = \{2\pi\eta^{\delta_n}[\gamma_n], -2\pi\eta^{\delta_n}[\gamma_n]|_{\Gamma_2}\},$$

$$\gamma_{n+1} = (1 - 2\beta_n\alpha_n)\gamma_n + \beta_n \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \varphi^{\delta_n}[\Pi_n] + e_\nu^{\delta_n} \right).$$

Задача финального наблюдения в электрическом приближении

Пусть $\vec{e}_T \in K_0(\text{rot}; \Omega)$. Найти $\Pi \equiv (\text{grad } \varphi_0, \vec{J}^{\text{ext}})$, так что

$$\vec{E}(T) = -\text{grad } \varphi(T) = \vec{e}_T.$$

$$\vec{J}^{\text{ext}} = \vec{J}_1^{\text{ext}} + \vec{J}_2^{\text{ext}}, \quad \vec{J}_1^{\text{ext}} \in L_2(0, T, K(\Omega)), \quad \vec{J}_2^{\text{ext}} \in L_2(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega)),$$

$$(\vec{J}^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2, \Omega} = (\vec{J}_2^{\text{ext}}, \text{grad } \psi)_{2, \Omega}, \quad \psi \in H(\Omega).$$

Определим $V = K_0(\text{rot}; \Omega) \times L_2(0, T, K_0(\text{rot}; \Omega)\{L_2(Q)\}^3)$,
 $\varphi[\Pi]$ – решение задачи (11) с данными $\Pi \in V$,

$$F : V \rightarrow K_0(\text{rot}; \Omega), \quad F(\Pi) \equiv \text{grad } \varphi[\Pi](T), \quad \Pi \in V.$$

$$\|\text{grad } \varphi_0\|_{2, \Omega}^2 + \|\vec{J}^{\text{ext}}\|_{2, Q}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\Pi) = -\vec{e}_T, \quad (40)$$

$$\Pi \in V, \quad \vec{e}_T \in K_0(\text{rot}; \Omega).$$

Задача финального наблюдения

Семейство задач, зависящих от ошибки δ

$$\|\vec{e}_T - \vec{e}_T^\delta\|_{2,\Omega} \leq \delta, \quad \|\sigma - \sigma^\delta\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \delta, \quad \delta \in [0, \delta_0], \quad \delta_0 > 0.$$

$\varphi^\delta[\Pi]$ – решение задачи (11), где σ заменено на σ^δ ,
 $F^\delta(\Pi) = \text{grad } \varphi^\delta[\Pi](T)$.

Случай $\delta = 0$ соответствует точному заданию $\vec{e}_T$, σ .

$$\|\Pi\|^2 \rightarrow \inf, \quad F^\delta(\Pi) = -\vec{e}_T^\delta, \quad \Pi \in V, \quad \vec{e}_T^\delta \in K_0(\text{rot}; \Omega).$$

Для любых $\Pi \in V$

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\text{grad } \varphi^\delta[\Pi](t) - \text{grad } \varphi[\Pi](t)\|_{2,\Omega} \leq C\delta \|\Pi\|$$

где $C > 0$ не зависит от Π и δ . Таким образом,

$$\|F - F^\delta\| \leq C\delta.$$

Задача финального наблюдения

Функционал Лагранжа –

$$L^\delta(\Pi, \vec{\lambda}) \equiv \|\Pi\|^2 + (\vec{\lambda}, \text{grad } \varphi^\delta[\Pi](T) + \vec{e}_T^\delta)_{2,\Omega}, \quad \Pi \in V, \quad \vec{\lambda} \in K_0(\text{rot}; \Omega),$$

двойственная задача –

$$V^\delta(\vec{\lambda}) \rightarrow \sup, \quad V^\delta(\vec{\lambda}) = \min_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \vec{\lambda}), \quad \vec{\lambda} \in K_0(\text{rot}; \Omega).$$

$$\Pi^\delta(\vec{\lambda}) = \text{argmin}_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \vec{\lambda}), \quad \Pi^\delta(\vec{\lambda}) = L^\delta(\Pi^\delta(\vec{\lambda}), \vec{\lambda}).$$

Оператор $(F^\delta)^* : K_0(\text{rot}; \Omega) \rightarrow V^*$ – сопряженный оператору F^δ ,

$$\langle (F^\delta)^*(\vec{\lambda}), \Pi \rangle = (\vec{\lambda}, \text{grad } \varphi^\delta[\Pi](T))_{2,\Omega}, \quad \vec{\lambda} \in K_0(\text{rot}; \Omega), \quad \Pi \in V.$$

$$\Pi^\delta(\vec{\lambda}) = -1/2(F^\delta)^*(\vec{\lambda}),$$

$$V^\delta(\vec{\lambda}) = -1/4\|(F^\delta)^*(\vec{\lambda})\|_V^2 + (\vec{e}_T^\delta, \vec{\lambda})_{2,\Omega}.$$

Сопряженная задача

Пусть $\vec{d} \in K_0(\text{rot}; \Omega)$.

Найти функцию $\eta \in H^1(0, T, H(\Omega))$, удовлетворяющую условию

$$\text{grad } \eta(x, T) = \vec{d}(x), \quad x \in \Omega \quad (41)$$

и такую, что для всех $\psi \in H(\Omega)$

$$-\frac{d}{dt}(\text{grad } \eta, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma \text{ grad } \eta, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 0. \quad (42)$$

Лемма 5

$$4\pi \int_Q (\vec{J}^{\text{ext}} \cdot \text{grad } \eta) dx dt = \\ \int_{\Omega} (\text{grad } \varphi(T) \cdot \vec{d}) dx - \int_{\Omega} (\text{grad } \varphi_0 \cdot \text{grad } \eta(0)) dx.$$

Сопряженный оператор

Пусть $\eta^\delta[\vec{\lambda}]$ – решение сопряженной задачи (42), (41) при $\sigma = \sigma^\delta$ с исходными данными $\vec{\lambda} \in K_0(\text{rot}; \Omega)$.

$$\langle (F^\delta)^*(\vec{\lambda}), \Pi \rangle = \int_{\Omega} (\text{grad } \eta^\delta[\vec{\lambda}](0) \cdot \text{grad } \varphi^0) dx + 4\pi \int_Q (\vec{J}^{\text{ext}} \cdot \text{grad } \eta^\delta(\vec{\lambda})) dx dt,$$

$$(F^\delta)^*(\vec{\lambda}) = (\text{grad } \eta^\delta[\vec{\lambda}](0), 4\pi \text{grad } \eta^\delta(\vec{\lambda})).$$

$$\Pi^\delta(\vec{\lambda}) = -1/2 (F^\delta)^*(\vec{\lambda}) = (-1/2 \text{grad } \eta^\delta[\vec{\lambda}](0), -2\pi \text{grad } \eta^\delta(\vec{\lambda})).$$

Итеративная двойственная регуляризация

$$\vec{\gamma}_{k+1} = (1 - 2\beta_k \alpha_k) \vec{\gamma}_k + \beta_k (\text{grad } \varphi^{\delta_k} [\Pi^{\delta_k}(\vec{\gamma}_k)](T) + \vec{e}_T^{\delta_k}),$$

$$k = 1, 2, \dots, \vec{\gamma}_1 \in K_0(\text{rot}; \Omega).$$

Задача финального наблюдения для квазистационарного приближения

Обозначим исходные данные задачи (19)-(22) через $\Pi \equiv (\Psi_0, \vec{j}^{\text{ext}})$, пусть $(\Psi[\Pi], \vec{\mathcal{E}}[\Pi])$ – решение задачи (19)-(22) с данными Π .

Финальное наблюдение:

$$\Psi[\Pi](T) = \Psi_T \equiv \{\vec{h}_T, \text{grad } \varphi_T\} \in L_0(\Omega).$$

$$V = L_0(\Omega) \times \{L_2(Q)\}^3, \quad H = L_0(\Omega).$$

$$F : V \rightarrow H, \quad F[\Pi] = \Psi[\Pi](T), \quad \Pi \in V.$$

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

$$f(\Pi) = \|\Pi\|_V^2 = (\mu \vec{h}, \vec{h})_{2,\Omega} + (\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \varphi_0)_{2,\Omega} + \|\vec{j}^{\text{ext}}\|_{2,Q}^2.$$

$$f(\Pi) \rightarrow \inf, \quad F[\Pi] = \Psi_T, \quad \Pi \in V, \quad \Psi_T \in H. \quad (43)$$

Сопряженная задача

Пусть $\vec{d} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\text{grad } \xi \in K_0(\text{rot}; \Omega)$.

Найти $\Psi^* \equiv \{\vec{H}^*, \text{grad } \varphi^*\} \in L_2(0, T, L_0(\Omega))$, $\vec{\mathcal{E}}^* \in L_2(0, T, K(\Omega))$ такие, что для всех $\Phi = \{\vec{u}, \text{grad } \psi\} \in V_0(\Omega)$, $\vec{v} \in U_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\Psi^*, \Phi)_L + (\vec{\mathcal{E}}^*, \text{rot } \vec{u})_{2,\Omega} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \vec{\mathcal{E}}^*, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} - \\ - \frac{4\pi}{c} (\sigma \text{grad } \varphi^*, \text{grad } \psi)_{2,\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$(\sigma \vec{\mathcal{E}}^*, \vec{v})_{2,\Omega} - (\sigma \text{grad } \varphi^*, \vec{v})_{2,\Omega} + \frac{c}{4\pi} (\vec{H}^*, \text{rot } \vec{v})_{2,\Omega} = 0, \quad (45)$$

$$\Psi^*(T) = \Psi_T^* = \{\vec{d}, \text{grad } \xi\}. \quad (46)$$

Сопряженный оператор

Пусть $\Psi \equiv \{\vec{H}, \text{grad } \varphi\}$, $\vec{\mathcal{E}}$ – решение прямой задачи (19)-(22),
 $\Psi^* \equiv \{\vec{H}^*, \text{grad } \varphi^*\}$, $\vec{\mathcal{E}}^*$ – решение сопряженной задачи (44)-(46).
Тогда

$$\begin{aligned} & (\mu \vec{H}(T), \vec{d})_{2,\Omega} + (\text{grad } \varphi(T), \text{grad } \xi)_{2,\Omega} - \\ & - (\mu \vec{h}, \vec{H}^*(0))_{2,\Omega} - (\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \varphi^*(0))_{2,\Omega} = \\ & = -4\pi(\vec{J}^{\text{ext}}, \vec{E}^*)_{2,Q}. \end{aligned}$$

$$F^* : H \rightarrow V^*, \quad \langle (F^* \lambda, \Pi) \rangle = (\lambda, F(\Pi))_L, \quad \lambda \in H, \quad \Pi \in V,$$

$$F^*(\lambda) = \{\vec{H}^*[\lambda](0), \text{grad } \varphi^*[\lambda](0), -4\pi \vec{E}_\delta^*[\lambda]\},$$

$\Psi^*[\lambda] = \{\vec{H}^*[\lambda], \text{grad } \varphi^*[\lambda]\} \in L_2(0, T, L_0(\Omega))$ и $\vec{\mathcal{E}}^*[\lambda] \in L_2(0, T, K(\Omega))$
– решение сопряженной задачи, $\lambda = \{\vec{d}, \text{grad } \xi\}$.

Семейство зависящих от ошибки δ задач

$$f(\Pi) \rightarrow \inf, F^\delta[\Pi] = \Psi_T^\delta, \Pi \in V, \Psi_T^\delta \in H. \quad (47)$$

$\{\Psi^\delta[\Pi] = \{\vec{H}^\delta[\Pi], \text{grad } \varphi^\delta[\Pi]\}, \vec{\mathcal{E}}[\Pi]\}$ – решение задачи (19)-(22),
 $\{\Psi_\delta^*[\lambda] = \{\vec{H}_\delta^*[\lambda], \text{grad } \varphi_\delta^*[\lambda]\}, \vec{\mathcal{E}}_\delta^*[\lambda]\}$ – решение сопряженной задачи
при $\sigma = \sigma^\delta$. $\Psi_T^\delta \equiv \{\vec{h}_T^\delta, \text{grad } \varphi_T^\delta\}$, $F^\delta[\Pi] = \Psi^\delta[\Pi](T)$,

$$\|\vec{h}_T - \vec{h}_T^\delta\|_{2,\Omega} \leq \delta, \|\text{grad } \varphi_T - \text{grad } \varphi_T^\delta\|_{2,\Omega} \leq \delta, \|\sigma - \sigma^\delta\| \leq \delta,$$

$$\|F - F^\delta\| \leq C\delta, \delta \in [0, \delta_0], \delta_0 > 0.$$

$$(F^\delta)^* : H \rightarrow V^*, \langle (F^\delta)^* \lambda, \Pi \rangle = (\lambda, F^\delta(\Pi))_L, \lambda \in H, \Pi \in V,$$

$$(F^\delta)^*(\lambda) = \{\vec{H}_\delta^*[\lambda](0), \text{grad } \varphi_\delta^*[\lambda](0), -4\pi \vec{E}_\delta^*[\lambda]\}.$$

Двойственные алгоритмы

Функционал Лагранжа

$$\begin{aligned} L^\delta(\Pi, \lambda) &\equiv \|\Pi\|_V^2 + (\lambda, F^\delta[\Pi] - \Psi_T^\delta)_H = \\ &= (\mu \vec{h}, \vec{h})_{2,\Omega} + (\text{grad } \varphi_0, \text{grad } \varphi_0)_{2,\Omega} + \|\vec{J}^{\text{ext}}\|_{2,Q}^2 + \\ &+ (\mu(\vec{H}^\delta[\Pi](T) - \vec{h}_T^\delta), \vec{d})_{2,\Omega} + (\text{grad}(\varphi^\delta(T) - \varphi_T^\delta), \text{grad } \xi)_{2,\Omega}, \\ \Pi &\equiv \{\Psi_0 \equiv \{\vec{h}, \text{grad } \varphi_0\}, \vec{J}^{\text{ext}}\} \in V, \quad \lambda \equiv \{\vec{d}, \text{grad } \xi\} \in H. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$V^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad V^\delta(\lambda) = \min_{\Pi \in V} L^\delta(\Pi, \lambda) = L^\delta(\Pi^\delta(\lambda), \lambda), \quad \lambda \in H.$$

$$\Pi^\delta(\lambda) = -\frac{1}{2}(F^\delta)^*(\lambda) = \left\{-\frac{1}{2}\vec{H}_\delta^*[\lambda](0), -\frac{1}{2}\text{grad } \varphi_\delta^*[\lambda](0), 2\pi\vec{E}_\delta^*[\lambda]\right\}.$$

Двойственные алгоритмы

Алгоритм Удзавы

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \{\vec{d}_1, \text{grad } \xi_1\} \in H, \\ \Pi_n &= \Pi(\lambda_n) = \left\{ -\frac{1}{2} \vec{H}^*[\lambda_n](0), -\frac{1}{2} \text{grad } \varphi^*[\lambda_n](0), 2\pi \vec{E}^*[\lambda_n] \right\}, \\ \vec{d}_{n+1} &= \vec{d}_n + \beta_n (\vec{H}[\Pi_n](T) - \vec{h}_T), \\ \text{grad } \xi_{n+1} &= \text{grad } \xi_n + \beta_n (\text{grad } \varphi[\Pi_n](T) - \text{grad } \varphi_T).\end{aligned}$$

Итеративная двойственная регуляризация

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{\vec{d}_1, \text{grad } \xi_1\} \in H, \\ \Pi_n &= \Pi^{\delta_n}(\gamma_n) = \left\{ -\frac{1}{2} \vec{H}_{\delta_n}^*[\gamma_n](0), -\frac{1}{2} \text{grad } \varphi_{\delta_n}^*[\gamma_n](0), 2\pi \vec{E}_{\delta_n}^*[\gamma_n] \right\}, \\ \vec{d}_{n+1} &= (1 - 2\beta_n \alpha_n) \vec{d}_n + \beta_n (\vec{H}^{\delta_n}[\Pi_n](T) - \vec{h}_T^{\delta_n}), \\ \text{grad } \xi_{n+1} &= (1 - 2\beta_n \alpha_n) \text{grad } \xi_n + \beta_n (\text{grad } \varphi^{\delta_n}[\Pi_n](T) - \text{grad } \varphi_T^{\delta_n}).\end{aligned}$$

Спасибо за внимание!