

# Dynamical systems on Fermi surfaces and galvanomagnetic phenomena in metals

Andrey Maltsev

III International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis”, dedicated to the 100th anniversary of V.S. Vladimirov, the 100th anniversary of L.D. Kudryavtsev and the 85th anniversary of O.G. Smolyanov

July 5–13, 2023, Moscow Region, Dolgoprudny

# Динамические системы на поверхностях Ферми и гальваномагнитные явления в металлах

А.Я. Мальцев

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН  
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00331, «Геометрические методы в гамильтоновой теории интегрируемых и почти интегрируемых систем»

Как хорошо известно, в квантовом случае, электрон, помещенный в периодический потенциал, обладает нетривиальным дисперсионным соотношением  $\epsilon(p)$ , где  $p$  представляет собой квазиимпульс электрона в кристалле. Разница между квазиимпульсом и обычным импульсом состоит в том, что квазиимпульс определен с точностью до векторов обратной решетки  $L^*$ , базисные векторы  $a_1, a_2, a_3$  которой связаны с базисными векторами кристаллической решетки  $L$  соотношениями

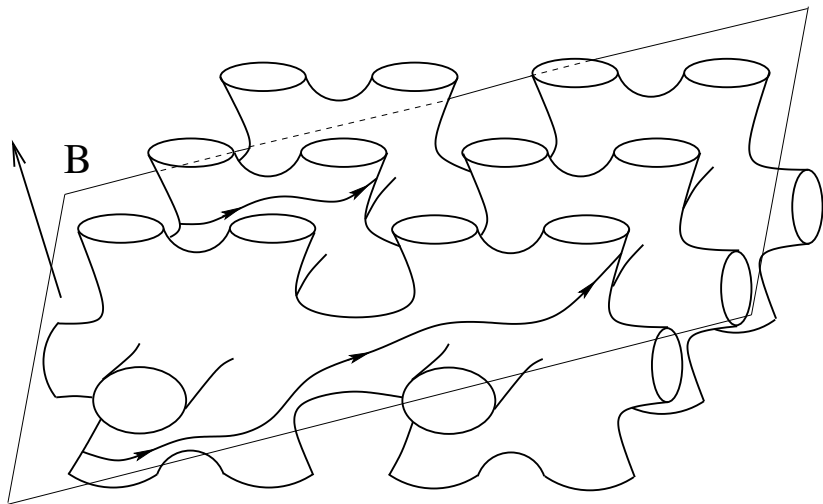
$$a_1 = 2\pi\hbar \frac{l_2 \times l_3}{(l_1, l_2, l_3)}, \quad a_2 = 2\pi\hbar \frac{l_3 \times l_1}{(l_1, l_2, l_3)}, \quad a_3 = 2\pi\hbar \frac{l_1 \times l_2}{(l_1, l_2, l_3)}$$

Дисперсионное соотношение  $\epsilon(p)$  является при этом 3-периодической функцией в  $p$  - пространстве, а эволюция электронных состояний в присутствии внешнего магнитного поля задается системой

$$\dot{p} = \frac{e}{c} [v_{gr}(p) \times B] = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon(p) \times B] \quad (1)$$

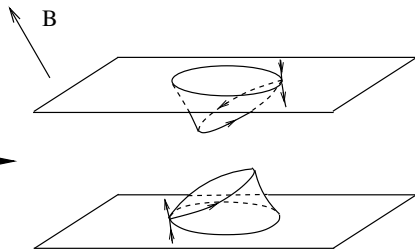
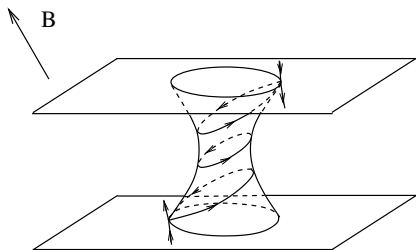
При описании электронных явлений в металлах обычно важным является описание траекторий системы (1) лишь на поверхности Ферми, определяемой соотношением  $\epsilon(p) = \epsilon_F$ . Система (1) может при этом рассматриваться как система на компактной двумерной поверхности, вложенной в трехмерный тор, а также как система на произвольной 3-периодической поверхности в трехмерном пространстве.

Специфика системы (1) особенно хорошо видна при ее рассмотрении в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , где ее траектории задаются пересечениями поверхностей уровня  $\epsilon(p) = \text{const}$  плоскостями, ортогональными магнитному полю.

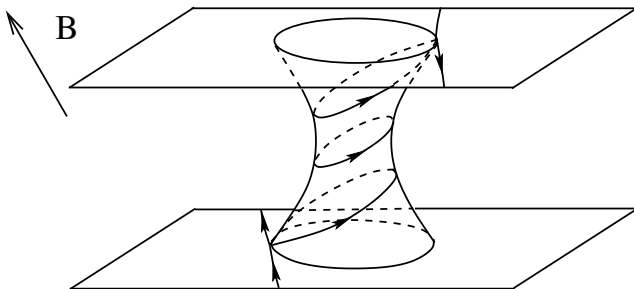


В целом, каждая траектория на поверхности представляет собой замкнутую или незамкнутую кривую. Каждая замкнутая кривая представляет собой самостоятельное подмногообразие (окружность) на поверхности, в то время как незамкнутые траектории блуждают по поверхности, образуя в результате довольно сложные (где-то плотные, где-то не плотные) множества на ней. Для каждой траектории можно рассмотреть ее замыкание на поверхности, представляющее собой часть поверхности, которую можно назвать носителем данной траектории. Такие носители называются компонентами (на которые распадается динамическая система), при этом компоненты, соответствующие замкнутым траекториям (в торе  $\mathbb{T}^3$ ), называются периодическими компонентами.

В случае, если на поверхности Ферми имеются также открытые траектории, можно сказать, что замкнутые траектории “разрезают” поверхность Ферми на связные компоненты, фиксируя, таким образом, носители открытых траекторий.

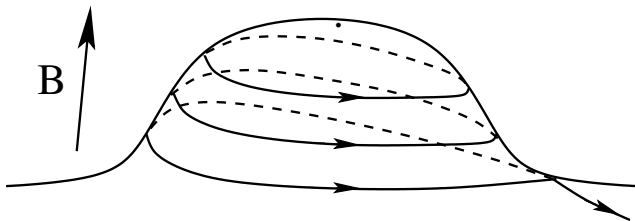


Все неособые замкнутые траектории системы (1) на поверхности Ферми объединены в конечное число (неэквивалентных) цилиндров таких траекторий, имеющих сингулярные точки системы (1) на своих основаниях. Для структур общего положения можно считать при этом, что на каждом из оснований цилиндров замкнутых траекторий находится ровно одна особая точка системы (1).



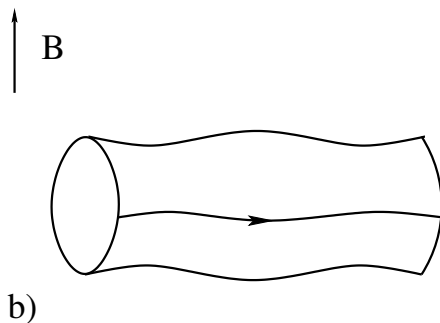
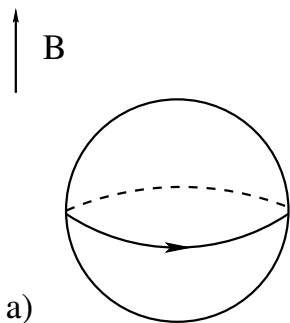


Одно замечание: среди цилиндров замкнутых траекторий могут быть также “топологически тривиальные”, одно из оснований которых стягивается в единственную особую точку.

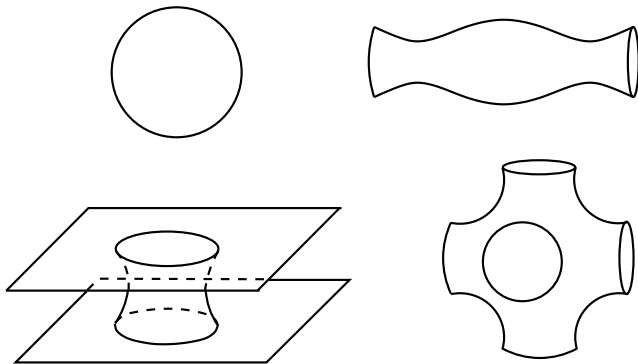


Такие цилиндры не играют существенной роли при описании глобальной геометрии траекторий системы (1), в то время как “нетривиальные” цилиндры замкнутых траекторий могут играть весьма существенную роль, определяя топологию оставшихся носителей открытых траекторий.

Конечно, можно построить поверхности Ферми, на которых могут возникать лишь очень простые траектории системы (1), в частности, лишь замкнутые, либо периодические траектории.



В целом, сложность поверхности Ферми определяется ее рангом, а именно размерностью образа в одномерных гомологиях при ее вложении в трехмерный тор. Легко видеть, что ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2 и 3.



Можно показать также, что ранг связной поверхности Ферми не может превосходить ее рода.

Для описания гальваномагнитных явлений в металлах обычно используется кинетическое уравнение

$$f_t + \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 [\nabla \epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}]^l \frac{\partial f}{\partial p^l} + e \sum_{l=1}^3 E^l \frac{\partial f}{\partial p^l} = I[f](\mathbf{p}, t),$$

где  $f(\mathbf{p}, t)$  является одночастичной функцией распределения в пространстве квазиимпульсов, а  $I[f]$  представляет интеграл столкновений.

Пределом сильных магнитных полей при этом считается выполнение условия  $\omega_B \tau \gg 1$ , где  $\omega_B = eB/m^*c$  играет роль циклотронной частоты в металле, а  $\tau$  представляет время свободного пробега электронов. Надо сразу отметить здесь, что для выполнения такого условия обычно требуется использование довольно сильных магнитных полей  $B \simeq 1 \text{ Тл}$  и довольно низких температур  $T \sim 1 \text{ К}$  в эксперименте.

Важность геометрии траекторий системы (1) при описании гальваномагнитных явлений в сильных магнитных полях была впервые отмечена школой И.М. Лифшица (И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, В.Г. Песчанский, 1957-1960). В частности, в работах этого времени были указано фундаментальное отличие вклада в проводимость замкнутых и открытых периодических траекторий системы (1) в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$ , а также построены важные нетривиальные примеры незамкнутых траекторий системы (1).

Вклады замкнутых и открытых периодических траекторий в тензор проводимости в пределе  $\omega_B \tau \gg 1$  можно при этом представить в виде

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty$$

(замкнутые траектории),

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty$$

(открытые периодические траектории).

Здесь мы везде полагаем, что ось  $z$  направлена вдоль направления магнитного поля. Кроме того, во втором случае выше мы предполагаем также, что ось  $x$  направлена вдоль среднего направления открытых траекторий в  $p$  - пространстве. Символы  $*$  обозначают некоторые постоянные порядка 1, а сами формулы выше определяют асимптотическое поведение (с точностью до множителей порядка 1) компонент тензора  $\sigma^{kl}$ .

Можно сразу отметить, что, в отличие от первого случая, проводимость имеет сильно анизотропные свойства в плоскости, ортогональной  $B$ , во втором случае, кроме того, явный вид для тензора  $\sigma^{kl}$  позволяет также измерить экспериментально среднее направление периодических траекторий в  $p$  - пространстве. Отметим здесь также, что проекции электронных траекторий в координатном пространстве на плоскость, ортогональную  $B$ , подобны траекториям в  $p$  - пространстве, повернутым на  $90^\circ$ , что объясняет вид тензора  $\sigma^{kl}$  во втором случае.

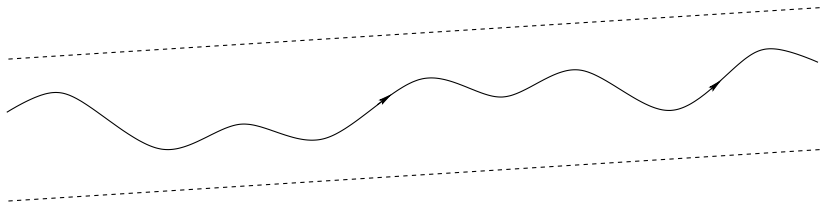
Общая задача классификации всех типов траекторий системы (1) была поставлена С.П. Новиковым в начале 1980-ых годов, а ее исследование принесло ряд глубоких топологических результатов и построение такой классификации к настоящему времени. Приложение теории задачи Новикова к теории гальваномагнитных явлений в металлах позволило при этом представить целый ряд новых результатов, относящихся к таким явлениям, в частности, ввести новые топологические числа, возникающие в магнетопроводимости при появлении устойчивых открытых траекторий системы (1) на поверхности Ферми, описать новые режимы поведения проводимости в сильных магнитных полях, неизвестные до этого, а также привести полную классификацию возможных режимов такого поведения в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$ . Классификация всевозможных типов траекторий системы (1) базируется при этом на серьезном исследовании топологии этой системы на поверхностях Ферми достаточно сложной формы.



При описании возможных типов траекторий системы (1) на достаточно сложных поверхностях Ферми удобно привести прежде всего описание устойчивых открытых траекторий системы (1), к которому мы теперь и перейдем.

Отметим здесь сразу, что мы называем открытые траектории системы (1) устойчивыми, если они сохраняются и не меняют своей глобальной геометрии при малых вариациях параметров задачи, в частности, малых вращениях направления магнитного поля и вариациях энергии Ферми  $\epsilon_F$ . Как следует из результатов работ А.В. Зорича (1984) и И.А. Дынникова (1992-1993), такие траектории обладают следующими замечательными свойствами:

1) Все устойчивые открытые траектории системы (1) при фиксированном направлении  $\mathbf{B}$  лежат в прямых полосах конечной ширины в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$ , проходя их насквозь.



2) Все устойчивые открытые траектории системы (1) при фиксированном направлении  $\mathbf{B}$  имеют одно и то же среднее направление в  $\mathbf{p}$ -пространстве, определяемое пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$  с некоторой целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскостью  $\Gamma$ , неизменной для всех близких направлений  $\mathbf{B}$ .

Приведенные выше свойства устойчивых открытых траекторий обусловлены, в действительности, особой топологией носителей таких траекторий на сложных поверхностях Ферми. А именно, носители таких траекторий представляют собой двумерные торы (с отверстиями), вложенные в трехмерный тор и имеющие один тот же класс в двумерных гомологиях при соответствующем вложении. Целочисленная плоскость  $\Gamma$ , в действительности, и определяется этим классом гомологий, устойчивым при малых вариациях параметров задачи.

Плоскость  $\Gamma$  является целочисленной по отношению к обратной решетке и не является, вообще говоря, кристаллографической плоскостью в исходной кристаллической решетке. Вместо этого, она ортогональна некоторому целочисленному кристаллографическому направлению  $m = (m^1, m^2, m^3)$ , а среднее направление устойчивых открытых траекторий в  $p$ -пространстве задается при этом формулой

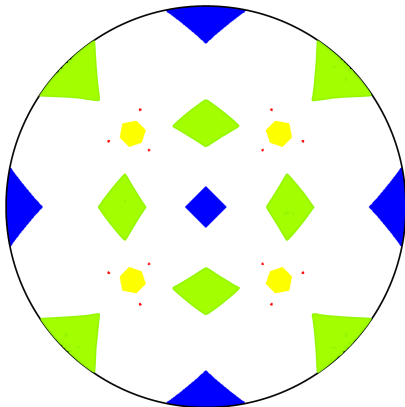
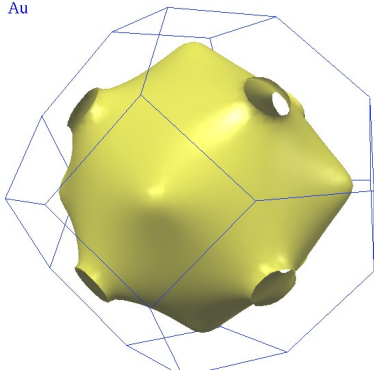
$$a \sim m \times B$$

Как можно показать, вклад устойчивых открытых траекторий в тензор проводимости в пределе  $\omega_{BT} \gg 1$  аналогичен в главном порядке вкладу периодических траекторий. Как следствие этого, среднее направление устойчивых открытых траекторий можно определить экспериментально (как и в случае периодических траекторий, это направление совпадает с направлением наибольшего подавления их вклада в проводимость в пределе сильных магнитных полей). Устойчивость соответствующего вклада позволяет также определить экспериментально направление соответствующей плоскости  $\Gamma$  и ввести топологические числа, представимые в виде целочисленных троек (индексов Миллера)  $(m^1, m^2, m^3)$  и наблюдаемые в проводимости нормальных металлов в этой ситуации (С.П. Новиков, А.Я. Мальцев, 1996).

Для заданной поверхности Ферми (конкретного исследуемого проводника) естественно рассматривать траектории системы (1) при всевозможных направлениях  $\mathbf{B}$ . Устойчивость описываемых траекторий, а также их вклада в тензор проводимости означает в этом случае их устойчивость по отношению к достаточно малым вращениям направления  $\mathbf{B}$ . При этом естественно ввести “угловую диаграмму проводимости”, описывающую поведение проводимости образца при различных направлениях магнитного поля.

В целом, угловая диаграмма проводимости металла с достаточно сложной поверхностью Ферми содержит в общем случае несколько “Зон Устойчивости” на единичной сфере (параметризующей направления  $\mathbf{B}$ ), каждая из которых отвечает своим значениям топологических чисел  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$

Au

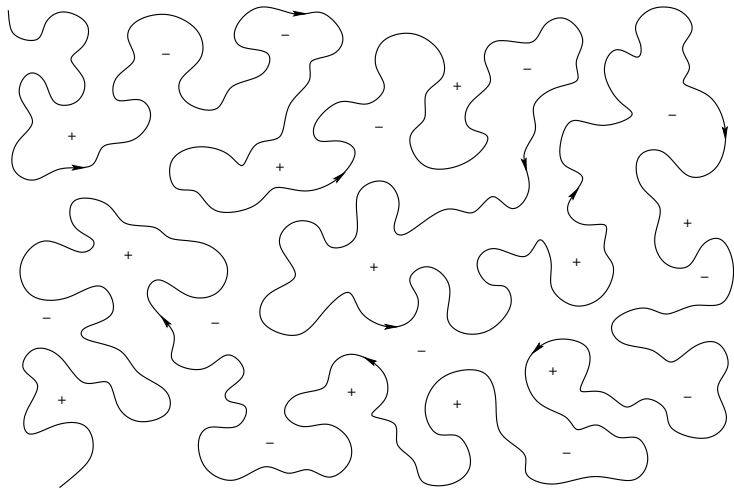


Форма поверхности Ферми и Зоны Устойчивости на угловой диаграмме проводимости для золота (Р. Де Лео, 2004)

Что касается неустойчивых открытых траекторий системы (1), примером таких траекторий могут являться периодические открытые траектории, возникающие вне Зон Устойчивости. Гораздо более интересными, однако, являются траектории, обладающие хаотическим поведением, существование которых было установлено при изучении задачи Новикова (С.П. Царев 1992-1993, И.А. Дынников 1997). Траектории этого типа неустойчивы как по отношению к малым вращениям направления  $B$ , так и по отношению к малым вариациям значения  $\epsilon_F$ , и могут быть разделены на два основных типа, а именно, траектории типа Царева и траектории типа Дынникова.

В отличие от устойчивых открытых траекторий, траектории типа Царева не могут быть заключены ни в какую прямую полосу конечной ширины в плоскости, ортогональной  $B$ , однако, они тем не менее имеют асимптотическое направление в этих плоскостях. Вклад траекторий типа Царева в тензор проводимости также сильно анизотропен в плоскости, ортогональной  $B$ .

Траектории типа Дынникова обладают наиболее сложным поведением, блуждая “всюду” в плоскостях, ортогональных  $B$ .





Следствием сложного хаотического поведения траекторий Дынникова, как в торе  $\mathbb{T}^3$ , так и в полном  $p$  - пространстве, является также их весьма нетривиальный вклад в проводимость в пределе сильных магнитных полей. Наиболее интересным эффектом является при этом подавление проводимости во всех пространственных направлениях, включая направление вдоль магнитного поля (А.Я. Мальцев, 1997), так что полный вклад таких траекторий в тензор  $\sigma^{kl}(B)$  имеет вид

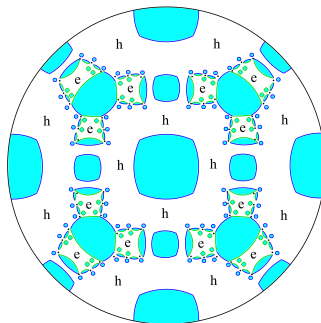
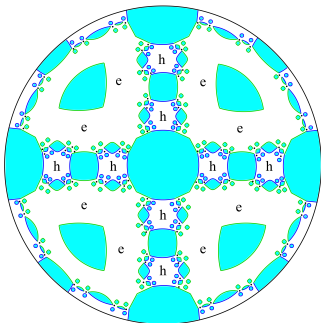
$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \end{pmatrix}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty$$

Другим весьма интересным эффектом является появление дробных степеней  $B$  в асимптотическом поведении такого вклада в проводимость в плоскости, ортогональной  $B$  (А.Я. Мальцев 1997, А.Я. Мальцев, С.П. Новиков 2018)

$$\sigma^{xx} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\alpha-2}, \quad \sigma^{yy} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\beta-2}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty, \\ 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Надо сказать, однако, что активное изучение геометрических свойств траекторий Дынникова активно продолжается и в настоящее время, открывая новые и весьма нетривиальные факты об их поведении (А.В. Зорич, И.А. Дынников, А.С. Скрипченко и др.).  
Весьма важными при этом должны также стать исследования экспериментальных эффектов, связанных с появляющимися новыми результатами.

Появление хаотических траекторий (Царева или Дынникова) на поверхности Ферми связано в действительности с довольно сложными угловыми диаграммами проводимости (содержащими, как правило, бесконечное число Зон Устойчивости, а также области, отвечающие различным типам (электронному и дырочному) холловской проводимости)



Диаграммы такого типа являются гораздо более редкими по сравнению с диаграммами, содержащими конечное число Зон Устойчивости. Вместе с тем, они также являются диаграммами общего положения и должны наблюдаться среди большого разнообразия проводников, в том числе, огромного многообразия современных материалов, получаемых искусственным образом. Обнаружение и исследование таких наиболее нетривиальных гальваномагнитных режимов в проводниках является при этом, с нашей точки зрения, актуальной и весьма интересной задачей современного материаловедения.

СПАСИБО  
ЗА ВНИМАНИЕ