

ПРИМЕР 1.

$$\varphi(s, t) := (s+t+a)^{-p} (s+t+a+1)^{-p} (s-t+b)^{-q} (s-t+b+1)^{-q},$$

где $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $a, b \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$.

ПРИМЕР 1.

$$\varphi(s, t) := (s+t+a)^{-p} (s+t+a+1)^{-p} (s-t+b)^{-q} (s-t+b+1)^{-q},$$

где $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $a, b \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$.

Соответствующий гипергеометрический идеал порождается дифференциальными операторами

$$\begin{aligned} & x \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + a \right)^p \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + b \right)^q - \\ & \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + a + 1 \right)^p \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + b + 1 \right)^q, \\ & y \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + a \right)^p \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + b + 1 \right)^q - \\ & \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + a + 1 \right)^p \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + b \right)^q. \end{aligned}$$

Идеал голономен для всех $a, b \in \mathbb{C}$, и всех $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$,
голономный ранг равен $2pq$.

Идеал голономен для всех $a, b \in \mathbb{C}$, и всех $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$, голономный ранг равен $2pq$.

Система нерезонансна в том и только том случае, когда $p = q = 1$.

Идеал голономен для всех $a, b \in \mathbb{C}$, и всех $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$, голономный ранг равен $2pq$.

Система нерезонансна в том и только том случае, когда $p = q = 1$.

При $p, q > 1$ имеет место резонанс и

$$\mathbb{G}(\varphi(s, t)) = \left\{ \left(-\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right), \left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2} \right), \left(-\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a-1}{2} \right), \left(\frac{a+b}{2} - 1, \frac{b-a}{2} \right) \right\}.$$

Особенности $\varphi(s, t)$ есть объединение четырех гиперплюс-костей. С четырьмя парами из этих гиперплюс-костей связаны нетривиальные вычеты Гротендика:

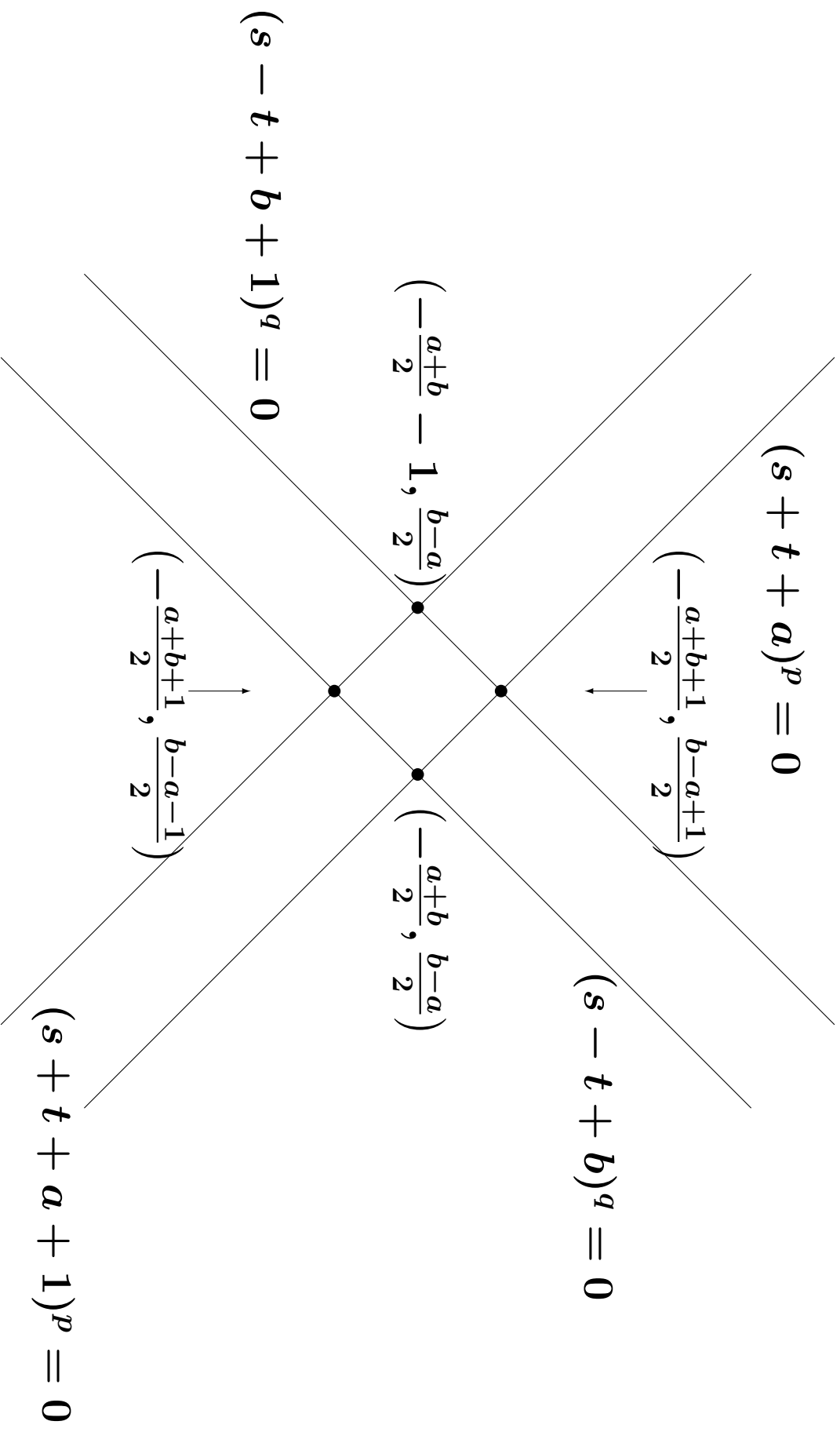
$$R_{00}(a, b; p, q) :=$$

$$\operatorname{res}_{\left(-\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)}[s+t+a, s-t+b] \left(\frac{x^s y^t}{(s+t+a+1)^p (s-t+b+1)^q} \right),$$

$$R_{01} := \operatorname{res}_{\left(-\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}\right)}[s+t+a, s-t+b+1] \left(\frac{x^s y^t}{(s+t+a+1)^p (s-t+b)^q} \right),$$

$$R_{10} := \operatorname{res}_{\left(-\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a-1}{2}\right)}[s+t+a+1, s-t+b] \left(\frac{x^s y^t}{(s+t+a)^p (s-t+b+1)^q} \right),$$

$$R_{11} := \operatorname{res}_{\left(-\frac{a+b}{2}-1, \frac{b-a}{2}\right)}[s+t+a+1, s-t+b+1] \left(\frac{x^s y^t}{(s+t+a)^p (s-t+b)^q} \right).$$



При $p = q = 2$ суммы вычетов

$$R_{00}(a, b; 2, 2) + R_{11}(a, b; 2, 2) =$$

$$-\frac{1}{8}x^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-1}y^{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}\left((x+1)(\ln^2 x - \ln^2 y) - 8(x-1)\ln x + 16(x+1)\right)$$

и

$$R_{01}(a, b; 2, 2) + R_{10}(a, b; 2, 2) =$$

$$-\frac{1}{8}x^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}}y^{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}}\left((y+1)(\ln^2 x - \ln^2 y) + 8(y-1)\ln y - 16(y+1)\right)$$

удовлетворяют системе гипергеометрических уравнений, а линейно независимые ветви этих функций порождают все 8-мерное пространство ее аналитических решений.

ПРИМЕР 2.

$$\varphi(s, t) := \left((s^2 + t^2 - 1)(s^2 + t^2 - 2s)(s^2 + t^2 - 2t)(s^2 + t^2 - 2s - 2t + 1) \right)^{-1},$$

ПРИМЕР 2.

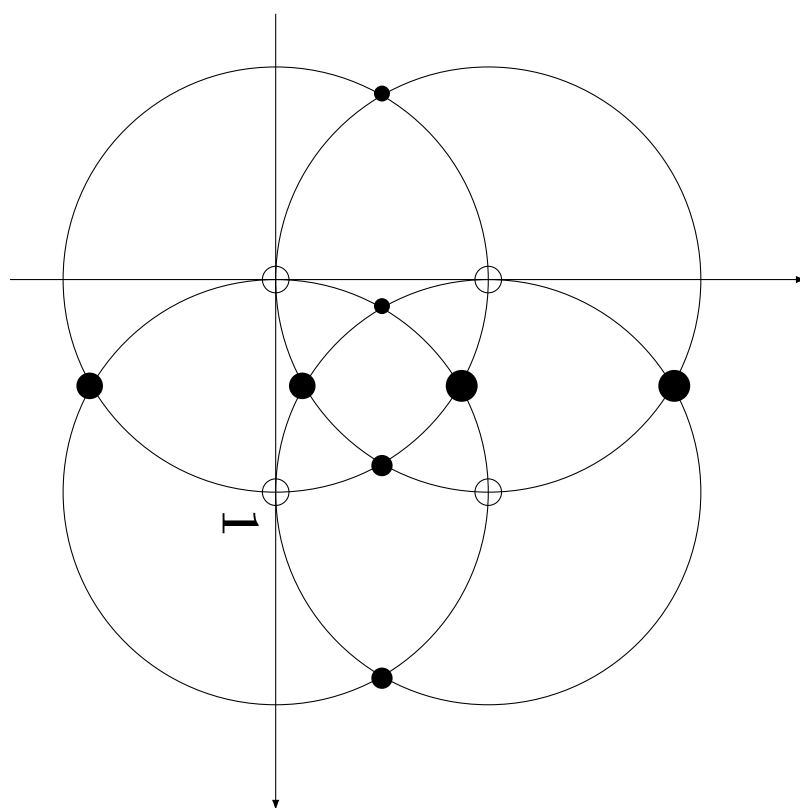
$$\varphi(s, t) :=$$

$$\left((s^2 + t^2 - 1)(s^2 + t^2 - 2s)(s^2 + t^2 - 2t)(s^2 + t^2 - 2s - 2t + 1) \right)^{-1},$$

Гипергеометрический идеал порождается дифференциальными операторами

$$\begin{aligned} & x \left(\Theta - 2x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\Theta - 2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right) - (\Theta - 1) \left(\Theta - 2y \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ & y \left(\Theta - 2y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\Theta - 2x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y} + 1 \right) - (\Theta - 1) \left(\Theta - 2x \frac{\partial}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \Theta := \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2.$$



$\mathbb{G}(\varphi)$ есть объединение пяти подмножеств:

$$\begin{aligned} & \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \\ & \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}, \\ & \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ & \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ & \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Вычисление вычетов дает следующие решения:

$1, x, y, xy,$

$$\begin{aligned} & \left(2 + \sqrt{3}\right) \sqrt{x} y^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(2 - \sqrt{3}\right) \sqrt{x} y^{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}, \\ & \left(2 + \sqrt{3}\right) x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{y} + \left(2 - \sqrt{3}\right) x^{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{y}, \\ & \left(2 - \sqrt{3}\right) x^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{y} + \left(2 + \sqrt{3}\right) x^{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{y}, \\ & \left(2 - \sqrt{3}\right) \sqrt{x} y^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(2 + \sqrt{3}\right) \sqrt{x} y^{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$