Уравнение Лёвнера–Куфарева и экстремальные задачи для конформных отображений с неподвижными точками на границе

В.В. Горяйнов

Волжский гуманитарный институт (филиал) ВолГУ

Международный рабочий семинар по комплексному анализу и его приложениям
26–27 декабря 2011 г.
г. Москва, Россия

K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. Math. Ann. **89***: 103–121, 1923*

Г.М. Голузин, О теоремах искажения в теории конформных отображений. Матем. сб. **1***, с. 127 – 135, 1936.*

П.П. Куфарев, Об однопараметрических аналитических функций. Матем. сб. **13***, с. 87 – 118, 1941.*

Ch. Pommerenke, Univalent functions. Vandenhoeck& Ruprecht, Göttingen, 1975.

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Роль единицы в этой полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$.

Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$.

Пусть $\mathfrak{P}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$. Тогда $\mathfrak{P}$ можно рассматривать как топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Роль единицы в этой полугруппе играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$.

Рассматривая $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$.

Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ функций из $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

(i) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$;

(ii) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$.

Заметим, что при целых неотрицательных значениях t мы получаем обычные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, функции $f = f^1$. Поэтому элементы семейства $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ называют также дробными итерациями функции f.

Это означает, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ функций из $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям:

(i) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$;

(ii) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$.

Заметим, что при целых неотрицательных значениях t мы получаем обычные итерации $f^n = f \circ f^{n-1}, n = 2, 3, \ldots,$ функции $f = f^1$. Поэтому элементы семейства $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ называют также дробными итерациями функции f.

Синтез алгебраических и топологических свойств приводит к тому, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ является дифференцируемым по t. Более того, оно даже бесконечно дифференцируемо, а производная

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f^t(z)-z}{t} = v(z)$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и вполне характеризует однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v\left(f^t(z)\right)$$

и начального условия $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Функцию v называют инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

Синтез алгебраических и топологических свойств приводит к тому, что семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ является дифференцируемым по t. Более того, оно даже бесконечно дифференцируемо, а производная

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f^t(z) - z}{t} = v(z)$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию и вполне характеризует однопараметрическую полугруппу $t \mapsto f^t$ посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v\left(f^t(z)\right)$$

и начального условия $f^t(z)|_{t=0} = z$.
Функцию v называют инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$.

Классический результат, известный как теорема Данжуа-Вольфа, утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка q из замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга $\mathbb{D}$ такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$.

При этом, если $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$, т. е. q является неподвижной точкой отображения $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. В случае, когда q является граничной точкой, т. е. лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z \to q} f(z), \quad f'(q) = \lim_{z \to q} f'(z) = \lim_{z \to q} \frac{f(z) - q}{z - q}.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leqslant 1$, т. е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой.

Классический результат, известный как теорема Данжуа-Вольфа, утверждает, что если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от дробно-линейного преобразования единичного круга на себя, то существует единственная точка q из замыкания $\overline{\mathbb{D}}$ единичного круга $\mathbb{D}$ такая, что $f^n(z) \to q$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$.

При этом, если $q \in \mathbb{D}$, то $f(q) = q$, т. е. q является неподвижной точкой отображения $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. В случае, когда q является граничной точкой, т. е. лежит на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, то в этой точке существуют угловые пределы

$$f(q) = \lim_{z\to q} f(z)\,, \quad f'(q) = \lim_{z\to q} f'(z) = \lim_{z\to q} \frac{f(z)-q}{z-q}\,.$$

Кроме того, $f(q) = q$ и $0 < f'(q) \leqslant 1$, т. е. q является граничной неподвижной притягивающей точкой.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей
$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$
где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

В литературе q называют точкой Данжуа-Вольфа функции f и она является общей для всех итераций этой функции. Таким образом, если $t \mapsto f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то все функции f^t, $t > 0$, имеют одну и ту же точку Данжуа-Вольфа q.

В терминах этой точки записывается вид инфинитезимальной образующей

$$v(z) = (q - z)(1 - \overline{q}z)p(z),$$

где p – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} p(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

Обратно, всякая функция v такого вида является инфинитезимальной образующей некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ с точкой Данжуа-Вольфа q.

Приведенный выше результат получен в работе

E. Berkson, H. Porta, "Semigroups of analytic functions and composition operators", Michigan Math. J., **25** *(1978), 101–115.*

и известен как формула Берксона-Порты. Он лежит в основе многих исследований.

Если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от тождественного преобразования, то в силу леммы Шварца внутри единичного круга $\mathbb{D}$ других, кроме точки Данжуа-Вольфа, неподвижных точек функция f иметь не может. С другой стороны, у неё могут быть неподвижные (в смысле углового предела) точки на границе $\mathbb{T}$ единичного круга.

Приведенный выше результат получен в работе

E. Berkson, H. Porta, "Semigroups of analytic functions and composition operators", Michigan Math. J., **25** *(1978), 101–115.*

и известен как формула Берксона-Порты. Он лежит в основе многих исследований.

Если $f \in \mathfrak{P}$ отлична от тождественного преобразования, то в силу леммы Шварца внутри единичного круга $\mathbb{D}$ других, кроме точки Данжуа-Вольфа, неподвижных точек функция f иметь не может. С другой стороны, у неё могут быть неподвижные (в смысле углового предела) точки на границе $\mathbb{T}$ единичного круга.

Теорема

Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{D}$ *функция* v *представляла собой инфинитезимальную образующую однопараметрической полугруппы* $t \to f^t$ *в* $\mathfrak{P}$ *с точкой Данжуа-Вольфа* $q \in \overline{\mathbb{D}}$ *и неподвижными точками* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$*, в которых функции* $f^t, t > 0$*, имеют конечные угловые производные, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$v(z) = \frac{(q-z)(1-\overline{q}z)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{1+\overline{a}_k z}{1-\overline{a}_k z} + g(z)},$$

где $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, *а* g *– голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция с неотрицательной вещественной частью.*

Основным объектом данного исследования является полугруппа $\mathfrak{L}[0,1]$ конформных отображений f единичного круга в себя, оставляющих неподвижными точки 0, 1 и имеющих конечную угловую производную $f'(1)$.

Подмножество $\{w_{t,s} : 0 \le s \le t \le T\}$ полугруппы $\mathfrak{L}[0,1]$ будем называть эволюционным семейством в $\mathfrak{L}[0,1]$, если выполнены условия:

(i) $w_{t,s} = w_{t,\tau} \circ w_{\tau,s}$ при $0 \le s \le \tau, t \le T$;

(ii) $w_{s,t}(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $s, t \to \tau$.

Основным объектом данного исследования является полугруппа $\mathfrak{L}[0,1]$ конформных отображений f единичного круга в себя, оставляющих неподвижными точки 0, 1 и имеющих конечную угловую производную $f'(1)$.

Подмножество $\{w_{t,s} : 0 \le s \le t \le T\}$ полугруппы $\mathfrak{L}[0,1]$ будем называть эволюционным семейством в $\mathfrak{L}[0,1]$, если выполнены условия:

(i) $w_{t,s} = w_{t,\tau} \circ w_{\tau,s}$ при $0 \le s \le \tau, t \le T$;

(ii) $w_{s,t}(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $s,t \to \tau$.

Введем в рассмотрение класс $\mathcal{Q}$ функций h, голоморфных в единичном круге и допускающих представление в виде

$$h(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-\varkappa}{1-z\varkappa} d\mu(\varkappa),$$

где μ – вероятностная мера на $\mathbb{T}$ (т. е., регулярная борелевская мера с единичной общей массой).

Теорема

Пусть $\{w_{t,s} : 0 \le s \le t \le T\}$ *– эволюционное семейство в* $\mathfrak{L}[0,1]$ *и функция* $\beta(t) = w'_{t,0}(1)$ *абсолютно непрерывна на* $[0, T]$. *Тогда для любого* $s \in [0, T)$ *функция* $t \to w_{t,s}(z)$ *абсолютно непрерывна на* $[s, T]$ *и является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = -\alpha(t) w(1-w) H(w,t)$$

с начальным условием $w|_{t=s} = z$, *где* $H(z,t)$ *– измеримая по* t *на* $[0, T]$ *и голоморфная по* z *в* $\mathbb{D}$ *функция, удовлетворяющая условию* $H(\cdot, t) \in \mathcal{Q}$ *для почти всех* t, $\alpha(t)$ *измеримая и неотрицательная.*

Теорема

Пусть на $\mathbb{D} \times [0, T]$ *определена комплекснозначная функция* $H(z, t)$*, которая голоморфна по* z*, измерима по* t *и* $H(\cdot, t) \in \mathcal{Q}$ *для почти всех* t*. Тогда для любых* $z \in \mathbb{D}$ *и* $s \in [0, T)$ *существует единственное абсолютно непрерывное решение* $w = w(t, z, s; H)$*,* $s \leq t \leq T$*, уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = -w(1-w)H(w, t)$$

с начальным условием $w\big|_{t=s} = z$*. Кроме того, при каждом* $t \in [s, T]$ *отображение* $w^H_{t,s} : z \to w(t, z, s; H)$ *принадлежит полугруппе* $\mathfrak{L}[0, 1]$ *и*

$$\frac{d}{dz} w^H_{t,s}(z)\Big|_{z=1} = \exp\left\{\int\limits_s^t H(1, \tau) d\tau\right\}.$$

Теорема

Пусть $f \in \mathfrak{L}[0,1]$ *и* $f'(1) = \beta > 1$. *Тогда найдется комплекснозначная функция* $H(z,t)$, *которая голоморфна по* z, *измерима по* t *и* $H(\cdot,t) \in \mathcal{Q}$ *для почти всех* $t \in [0,T]$, $T = \ln\beta$, *такая, что*

$$f(z) = w^H_{T,0}(z).$$

Теорема

Множество

$$\{\zeta = \ln f'(0) : \ f \in \mathfrak{L}[0,1],\ f'(1) \le \beta\},$$

$\beta > 1$, *представляет собой круг*

$$\{\zeta = (\omega - 1)\ln\beta : \ |\omega| \le 1\}.$$

При этом, граничную точку $\zeta = (\varkappa - 1)\ln\beta$, $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ *вносит единственная функция*

$$f(z) = F^{-1}\left(e^{(\varkappa-1)\ln\beta}F(z)\right),$$

где

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{1-\varkappa}}.$$

В частности, этот результат содержит в себе теорему искажения

$$|f'(0)| \geq \frac{1}{(f'(1))^2},$$

полученную ранее другими методами в работах C. Cowen, Ch. Pommerenke (1982), M. Anderson, A. Vasiliev (2008), и теорему вращения

$$|\arg f'(0)| \leq \ln f'(1).$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ