

Алгебраические методы в неклассических логиках

Лекция 1

С.П. Одинцов

Институт математики им. С.Л.Соболева
`odintsov@math.nsc.ru`

МИАН 25.10.2023

- $\mathcal{L} = \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\}$, $n_i \in \omega$ — *пропозициональный язык*.
 - Если $n_i = 0$, то f_i — *логическая константа*.
 - Если $n_i > 0$, то f_i — *n_i -местная логическая связка*.
 - $\text{Prop} = \{Q_0, Q_1, \dots\}$ — множество *пропозициональных переменных*.
 $p, q, r, \dots$ (возможно, с индексами) метаварьируемые над Prop .
 - *Множество формул $\text{Form}_{\mathcal{L}}$ ($\text{Form}_{\mathcal{L}}(\text{Prop})$) языка $\mathcal{L}$ над Prop — наименьшее множество слов в алфавите $\text{Prop} \cup \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}, (,), , \}$ такое, что:*
 - ① если $n_i = 0$, то $f_i \in \text{Form}_{\mathcal{L}}$;
 - ② $\text{Prop} \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}}$;
 - ③ если $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_i} \in \text{Form}_{\mathcal{L}}$, то $f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_i}) \in \text{Form}_{\mathcal{L}}$.
- $\mathcal{F}or_{\mathcal{L}} := \langle \text{Form}_{\mathcal{L}}; f_1, \dots, f_k \rangle$ — алгебра формул языка $\mathcal{L}$ над Prop .

- $\mathcal{F}or_{\mathcal{L}}$ — абсолютно свободная алгебра языка $\mathcal{L}$ над $\mathbf{Prop}$, т.е. любое отображение $h : \mathbf{Prop} \rightarrow |\mathcal{A}|$, где $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \dots, f_k^{\mathcal{A}} \rangle$, продолжается до гомоморфизма

$$\bar{h} : \mathcal{F}or_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{A},$$

$$\bar{h}(\varphi(p_1, \dots, p_n)) = \varphi(a_1, \dots, a_n), \text{ если } h(p_i) = a_i \in A.$$

- Эндоморфизм $s : \mathcal{F}or_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{F}or_{\mathcal{L}}$ называется *подстановкой*.
- Если $\varphi(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{Form}_{\mathcal{L}}$ и $sp_i = \psi_i$ для $i = 1, \dots, n$, то

$$s\varphi = \varphi(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

- ψ — (*подстановочный*) *частный случай* формулы φ , если $\psi = s\varphi$ для некоторой подстановки s .
- Гомоморфизм $s : \mathcal{F}or_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *$\mathcal{A}$ -оценкой*.

- $\mathcal{L} = \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\},$

$$\text{Eq}_{\mathcal{L}} = (\text{Form}_{\mathcal{L}})^2 = \{\varphi \approx \psi \mid \varphi, \psi \in \text{Form}_{\mathcal{L}}.\}$$

- $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \dots, f_k^{\mathcal{A}} \rangle, \quad \varphi \approx \psi \in \text{Eq}_{\mathcal{L}}$

$$\mathcal{A} \models \varphi \approx \psi \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi) \text{ для любой } \mathcal{A}\text{-оценки } v$$

- $\Gamma \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq \text{Eq}_{\mathcal{L}}$

$$\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \text{для любой } \mathcal{A}\text{-оценки } v$$

$$((v(\chi) = v(\theta) \text{ для всех } \chi \approx \theta \in \Gamma) \Rightarrow v(\varphi) = v(\psi)).$$

- $\Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow (\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi \approx \psi \text{ для всех } \mathcal{A}).$

Свойства эквационального следования

Для любых $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}}$ и $\varphi \in \text{Form}_{\mathcal{L}}$ выполнены следующие условия:

- ❶ **Рефлексивность**: если $\varphi \approx \psi \in \Gamma$, то $\Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$.
- ❷ **Монотонность**: если $\Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, то $\Delta \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$.
- ❸ **Транзитивность**: если $\Gamma \models_{\text{Eq}} \chi \approx \theta$ для любого $\chi \approx \theta \in \Delta$ и $\Delta \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$, то $\Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$.
- ❹ **Структурность**: $\Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$ влечет $s\Gamma \models_{\text{Eq}} s\varphi \approx s\psi$ для любой подстановки $s : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \text{Form}_{\mathcal{L}}$ ($s\Gamma = \{s\chi \approx s\theta \mid \chi \approx \theta \in \Gamma\}$).

$$v(s\varphi) = v \circ s(\varphi)$$

для любых подстановки s и $\mathcal{A}$ -оценки v .

- Аксиомы: $\varphi \approx \varphi$.
- Правила вывода

$$(Sym) \frac{\varphi \approx \psi}{\psi \approx \varphi} \quad (Tr) \frac{\varphi \approx \psi \quad \psi \approx \chi}{\varphi \approx \chi}$$

$$(Con) \frac{\varphi_1 \approx \psi_1 \quad \dots \quad \varphi_n \approx \psi_n}{f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \approx f(\psi_1, \dots, \psi_n)}, \quad f^n \in \mathcal{L}$$

$$(Sub) \frac{\varphi(p_1, \dots, p_m) \approx \psi(p_1, \dots, p_m)}{\varphi(\chi_1, \dots, \chi_n) \approx \psi(\chi_1, \dots, \chi_n)}$$

- $\Gamma \vdash_{Eq} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow$ существует дерево вывода с корнем $\varphi \approx \psi$, листьями которого являются аксиомы или тождества из Γ .

Теорема (G. Birkhoff)

Пусть $\Gamma \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq \text{Eq}_{\mathcal{L}}$. Тогда

$$\Gamma \vdash_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Индукция по глубине дерева вывода.

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \not\vdash_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$. Полагаем

$$\Theta(\Gamma) = \{(\alpha, \beta) \mid \Gamma \vdash_{\text{Eq}} \alpha \approx \beta\}.$$

$\Theta(\Gamma)$ — конгруэнция на $\mathcal{F}or_{\mathcal{L}}$. Полагаем

$$\mathbb{F}_{\Gamma} = \mathcal{F}or_{\mathcal{L}} / \Theta(\Gamma) = \langle \text{Form}_{\mathcal{L}} / \Theta(\Gamma), f_1, \dots, f_k \rangle,$$

где $\text{Form}_{\mathcal{L}} / \Theta(\Gamma) = \{[\varphi]_{\Theta(\Gamma)} \mid \varphi \in \text{Form}_{\mathcal{L}}\}$

$$f_i([\psi_1]_{\Theta(\Gamma)}, \dots, [\psi_{n_i}]_{\Theta(\Gamma)}) = [f_i(\psi_1, \dots, \psi_{n_i})]_{\Theta(\Gamma)}, \quad [\alpha]_{\Theta(\Gamma)} = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in \Theta(\Gamma)\}$$

Доказательство (завершение).

Пусть $\alpha(p_1, \dots, p_n) \approx \beta(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma$ и $v \vdash \mathbb{F}_\Gamma$ -оценка, причем $v(p_i) = [\psi_i]$. Тогда

$$v\alpha = [\alpha(\psi_1, \dots, \psi_n)] \quad \text{и} \quad v\beta = [\beta(\psi_1, \dots, \psi_n)]$$

По правилу (*Sub*) заключаем

$$\Gamma \vdash_{\text{Eq}} \alpha(\psi_1, \dots, \psi_n) \approx \beta(\psi_1, \dots, \psi_n),$$

т.е. $(\alpha(\psi_1, \dots, \psi_n), \beta(\psi_1, \dots, \psi_n)) \in \Theta(\Gamma)$, откуда $v\alpha = v\beta$.

Пусть $v_0(p) = [p]$ для всех $p \in \text{Prop}$. Тогда $v_0\varphi = [\varphi]$ и $v_0\psi = [\psi]$.

$\Gamma \not\vdash_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi$ влечет $v_0\varphi \neq v_0\psi$.

Таким образом,

$$\mathbb{F}_\Gamma \models_{\text{Eq}} \Gamma \quad \text{и} \quad \mathbb{F}_\Gamma \not\models_{\text{Eq}} \varphi \approx \psi.$$



Операторы замыкания и отношения замыкания.

Определение

Оператор замыкания на множестве A — это функция $C : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, удовлетворяющая следующим свойствам для любых $X, Y \subseteq A$

- (I) *Identity*: $X \subseteq C(X)$;
- (M) *Monotonicity*: если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$;
- (C) *Cut, transitivity*: $C(X) = CC(X)$.

Определение

Отношение замыкания на множестве A — это отношение $\vdash \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$, удовлетворяющая следующим свойствам для любых $X, Y \subseteq A$

- (I) если $a \in X$, то $X \vdash a$;
- (M) если $X \vdash a$ и $X \subseteq Y$, то $Y \vdash a$;
- (C) если $X \vdash a$ и $Y \vdash b$ для всех $b \in X$, то $Y \vdash a$.

Операторы замыкания и отношения замыкания

- Если $C : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ — оператор замыкания, то $\vdash_C$ — отношение замыкания на A , где

$$X \vdash_C a := a \in C(X).$$

- Если $\vdash \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$ — отношение замыкания, то $C_\vdash$ — оператор замыкания на A , где

$$C(X) := \{a \mid X \vdash a.\}$$

- $C = C_{\vdash_C}$ и $\vdash = \vdash_{C_\vdash}$

Следование по Тарскому

- Отношение замыкания на множестве формул $\vdash \subseteq 2^{\text{Form}_{\mathcal{L}}} \times \text{Form}_{\mathcal{L}}$ называется **следованием по Тарскому**
- Следование по Тарскому $\vdash$ называется **структурным**, если $\Gamma \vdash \varphi$ влечет $s\Gamma \vdash s\varphi$ для любой подстановки $s : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \text{Form}_{\mathcal{L}}$ ($s\Gamma = \{s\psi \mid \psi \in \Gamma\}$).
- Следование по Тарскому $\vdash$ называется **компактным**(**финитным**), если $\Gamma \vdash \varphi$ влечет $\Delta \vdash \varphi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$.

- $L = \langle \mathcal{L}, \vdash_L \rangle$ — **логика**, если $\mathcal{L}$ — пропозициональный язык, а $\vdash_L$ — структурное следование по Тарскому над $\mathcal{L}$.
 $\vdash_L$ — отношение **следования** логики L . Cn_L — соответствующий оператор замыкания.
- Для логики $L = \langle \mathcal{L}, \vdash_L \rangle$ полагаем
 $\text{Thm}(L) = \{\varphi \mid \emptyset \vdash_L \varphi\} = Cn_L(\emptyset)$
- $\text{Thm}(L)$ — множество **теорем** логики L
- $s\text{Thm}(L) \subseteq \text{Thm}(L)$ для любой подстановки s
- Γ — L -теория, если $Cn_L(\Gamma) = \Gamma$.

- $\rightarrow \in \mathcal{L}$
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ — сокращенная запись пары формул $\varphi \rightarrow \psi$ и $\psi \rightarrow \varphi$.
- $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\chi}$ — сокращенная запись для двух-посылочного правила

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\chi},$$

- $\frac{\chi_1 \dots \chi_n}{\varphi \leftrightarrow \psi}$ — сокращенная запись двух правил

$$\frac{\chi_1 \dots \chi_n}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \text{и} \quad \frac{\chi_1 \dots \chi_n}{\psi \rightarrow \varphi}.$$

- Если $\wedge \in \mathcal{L}$, то $\varphi \leftrightarrow \psi$ можно понимать стандартным образом

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi).$$

Допустимые и производные правила

Рассмотрим логику L и правило

$$\frac{\phi_1, \dots, \phi_n}{\psi} \quad (R)$$

- (R) *допустимо в логике L* , если для любых $\xi_1, \dots, \xi_n$ и χ , таких что χ получается из $\xi_1, \dots, \xi_n$ по правилу (R) , т.е. для некоторой постановки s

$$\xi_1 = s\phi_1, \dots, \xi_n = s\phi_n \text{ и } \chi = s\psi,$$

$\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset L$ влечёт $\chi \in L$;

- (R) — *производное правило логики L* , если $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash_L \psi$.

- 1 Очевидно, что всякое производное правило логики L будет допустимо в L .
- 2 Правило (?) подстановки

$$(Sub) \frac{\varphi(p_1, \dots, p_n)}{\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)}$$

допустимо в L ввиду $sThm(L) \subseteq Thm(L)$.

Допустимые и производные правила

- *n -кратное правило (?) замены:*

$$\frac{p_1 \leftrightarrow q_1, \dots, p_n \leftrightarrow q_n}{\chi(p_1, \dots, p_n) \leftrightarrow \chi(q_1, \dots, q_n)}$$

- *Кратное правило замены допустимо (является производным) в логике L , если любое n -кратное правило замены допустимо (является производным) в L .*

- *эквивалентность транзитивна в L , если правило*

$$\frac{p \leftrightarrow q \quad q \leftrightarrow r}{p \leftrightarrow r}$$

является производным в L .

Логические матрицы для языка $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L} = \{f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k}\}$, $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \dots, f_k^{\mathcal{A}} \rangle$ — алгебраическая система.
- **Логическая матрица** — это пара $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D^{\mathcal{M}} \rangle$, где $D^{\mathcal{M}} \subseteq A$ — множество **выделенных значений** матрицы $\mathcal{M}$.
- $\text{Taut}(\mathcal{M}) = \{\varphi \mid v(\varphi) \in D^{\mathcal{M}} \text{ для любой } \mathcal{A}\text{-оценки } v\}$ — множество **тавтологий** матрицы $\mathcal{M}$.
- $s\text{Taut}(\mathcal{M}) \subseteq \text{Taut}(\mathcal{M})$ для любой подстановки s .

Логические матрицы и следование

- $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D^{\mathcal{M}} \rangle$ — логическая матрица языка $\mathcal{L}$.
- $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi \Leftrightarrow (v(\Gamma) \subseteq D^{\mathcal{M}} \Rightarrow v(\varphi) \in D^{\mathcal{M}})$ для любой $\mathcal{A}$ -оценки v
 $(v(\Gamma) = \{v(\psi) \mid \psi \in \Gamma\})$
- Пусть $\mathcal{K}$ — класс матриц.
 $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi \Leftrightarrow (\Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi \text{ для всех } \mathcal{M} \in \mathcal{K}).$
- $\models_{\mathcal{M}}$ — структурное следование по Тарскому.
- $\mathcal{M}$ **нормальна**, если для любых $a, b \in |\mathcal{A}|$

$$a, a \rightarrow b \in D^{\mathcal{M}} \Rightarrow b \in D^{\mathcal{M}}.$$

- Если $\mathcal{M}$ нормальна, то правило

$$(MP) \quad \frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

допустимо в $\text{Taut}(\mathcal{M})$.

Матрица для CL

- $2 = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg \rangle$ где

$\vee$	$\begin{array}{c cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\wedge$	$\begin{array}{c cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\rightarrow$	$\begin{array}{c cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\neg$	$\begin{array}{c c} & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$
--------	--	----------	--	---------------	--	--------	---

- $2^C = \langle 2, \{1\} \rangle$
- $\text{Taut}(2^C)$ — множество классических тавтологий
- $\models_{2^C} = \vdash_{CL}$

Логические матрицы и независимость аксиом

- Независимая аксиоматика P_λ [A. Church 1956] для классической логики в языке $\{\rightarrow, \perp\}$

$$\text{Ax1 } ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p))$$

$$\text{Ax2 } \perp \rightarrow p$$

- $3^\lambda = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \rightarrow, \perp, \{1\} \rangle$, где $\perp = 0$ и

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$$x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}$$

- $\text{Ax2} \in \text{Taut}(3^\lambda)$, $\text{Ax1} \notin \text{Taut}(3^\lambda)$

$$v(p) = v(r) = \frac{1}{2}, \quad v(q) = 0, \quad v(s) = 1, \quad v(\text{Ax1}) = \frac{1}{2}$$

Если $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \text{Taut}(3^\lambda)$, то $\psi \in \text{Taut}(3^\lambda)$.

Определение

Логика L языка $\mathcal{L}$ называется **импликативной** если $\rightarrow \in \mathcal{L}$ и выполнены следующие условия

$$IL1 \quad p \rightarrow p \in \text{Thm}(L)$$

$$IL2 \quad \{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_L p \rightarrow r$$

(эквивалентность транзитивна в L)

$$IL3 \quad \{p_1 \leftrightarrow q_1, \dots, p_n \leftrightarrow q_n\} \vdash_L f(p_1, \dots, p_n) \rightarrow f(q_1, \dots, q_n) \text{ для каждой } f^n \in \mathcal{L}$$

(кратное правило замены производно в L)

$$IL4 \quad \{p, p \rightarrow q\} \vdash_L q$$

(*modus ponens* производно в L)

$$IL5 \quad \{p\} \vdash_L q \rightarrow p$$

Теорема

Пусть $L = \langle \mathcal{L}, \vdash_L \rangle$ — импликативная логика. Тогда $\text{Thm}(L) = \text{Taut}(\mathcal{M})$ для некоторой нормальной матрицы $\mathcal{M}$.^a

^aЕсли $\text{Thm}(L) = \text{Taut}(\mathcal{M})$, то $\mathcal{M}$ — (слабая) характеристическая матрица логики L .

Доказательство. Зададим отношение $\equiv_L$ на $\text{Form}_{\mathcal{L}}$:

$$\varphi \equiv_L \psi \iff \varphi \leftrightarrow \psi \in \text{Thm}(L)$$

$\equiv_L$ рефлексивно ввиду $p \rightarrow p \in \text{Thm}(L)$;

$\equiv_L$ симметрично по определению;

$\equiv_L$ транзитивно, так как эквивалентность транзитивна в L .

Таким образом, $\equiv_L$ — эквивалентность на $\text{Form}_{\mathcal{L}}$.

Более того, $\equiv_L$ — конгруэнция на $\text{Form}_{\mathcal{L}}$, ввиду производности кратного правила замены.

Логика и матрицы

Доказательство (окончание). Полагаем $\mathfrak{A}_L = \mathcal{F}or_{\mathcal{L}} / \equiv_L$, т.е.

$$|\mathfrak{A}_L| = \{[\varphi]_L \mid \varphi \in \text{Form}_{\mathcal{L}}\}, \quad [\varphi]_L = \{\psi \mid \psi \equiv_L \varphi\};$$

$$f([\psi_1]_L, \dots, [\psi_n]_L) = [f(\psi_1, \dots, \psi_n)]_L, \quad f^n \in \mathcal{L}.$$

Полагаем $\mathcal{M}_L = \langle \mathfrak{A}_L, \{1_L\} \rangle$, где $1_L = [\varphi_0]_L$ для произвольной $\varphi_0 \in \text{Thm}(L)$. Тогда $\mathcal{M}_L$ нормальна ввиду допустимости (MP) и

$$1_L = \text{Thm}(L).$$

Действительно, если $\psi \in \text{Thm}(L)$, то ввиду

$$\psi \vdash_L \varphi_0 \rightarrow \psi, \quad \varphi_0 \vdash_L \psi \rightarrow \varphi_0$$

получаем $\varphi_0 \leftrightarrow \psi \in \text{Thm}(L)$.

Если $v(p_1) = [\psi_1]_L, \dots, v(p_n) = [\psi_n]_L$, то

$$v(\varphi(p_1, \dots, p_n)) = [\varphi(\psi_1, \dots, \psi_n)]_L.$$

Поэтому $\varphi \in \text{Thm}(L)$ влечет $\varphi \in \text{Taut}(\mathcal{M}_L)$.

Если $\varphi \notin \text{Thm}(L)$ и $v(p_i) = [p_i]_L$, то $v(\varphi) = [\varphi]_L \neq 1_L$. Таким образом,

$$\text{Thm}(L) = \text{Taut}(\mathcal{M}_L).$$

- $\rho : \text{Eq}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Form}_{\mathcal{L}})$ — преобразователь тождеств.
- $\tau : \text{Form}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Eq}_{\mathcal{L}})$ — преобразователь формул.
- Преобразователь **структурный**, если он коммутирует с подстановками.
- Пусть ρ структурный. Полагаем $\Delta(p, q) := \rho(p \approx q)$. Тогда $\rho(\epsilon \approx \delta) = \Delta(\epsilon, \delta)$:

$$\rho(\epsilon \approx \delta) = \rho(sp \approx sq) = s\rho(p \approx q) = \Delta(sp, sq) = \Delta(\epsilon, \delta),$$

где $sp = \epsilon$ и $sq = \delta$.

$\Delta(p, q)$ — **формулы эквивалентности**

- Пусть τ структурный. Полагаем $E(p) := \tau(p)$. Тогда $\tau(\varphi) = E(\varphi)$ для любой $\varphi \in \text{Form}_{\mathcal{L}}$.
 $E(p)$ — **определяющие тождества**

Логика L **алгебраизуема** [W. Blok, D. Pigozzi 1989], если найдутся класс алгебр $\mathcal{K}$ и структурные преобразователи τ, ρ такие, что для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}}$ and $\Theta \cup \{\epsilon \approx \delta\} \subseteq \text{Eq}_{\mathcal{L}}$:

$$\text{ALG1} \quad \Gamma \vdash_L \varphi \Leftrightarrow \tau(\Gamma) \models_{\mathcal{K}} \tau(\varphi);$$

$$\text{ALG2} \quad \Theta \models_{\mathcal{K}} \epsilon \approx \delta \Leftrightarrow \rho(\Theta) \vdash_L \rho(\epsilon \approx \delta);$$

$$\text{ALG3} \quad p \dashv\vdash_L \rho\tau(p);$$

$$\text{ALG4} \quad p \approx q = \models_{\mathcal{K}} \tau\rho(p \approx q).$$

Предложение

Пусть L — логика, $\mathcal{K}$ — класс алгебр, τ и ρ — структурные преобразователи формул и тождеств. Тогда L алгебраизуема относительно $\mathcal{K}$ посредством τ и ρ , если и только если выполнены условия ALG1 и ALG4, если и только если выполнены условия ALG2 и ALG3.

Доказательство. Пусть выполнены условия ALG1 и ALG4, тогда

$$\begin{aligned}\rho(\Theta) \vdash_L \rho(\epsilon = \delta) &\Leftrightarrow [\text{ALG1}] \quad \tau\rho(\Theta) \models_{\mathcal{K}} \tau\rho(\epsilon \approx \delta) \\ &\Leftrightarrow [\text{ALG4}] \quad \Theta \models_{\mathcal{K}} \epsilon \approx \delta,\end{aligned}$$

т.е. выполнено ALG2.

Согласно ALG4 $\tau\rho = \models_{\mathcal{K}} \tau\rho\tau\rho$ откуда по ALG1

$$\rho \dashv\vdash_L \rho\tau(\rho),$$

т.е. условие ALG3 также выполнено.

Переход от ALG2 и ALG3 к условиям ALG1 и ALG4 аналогичен.

Предложение

Пусть L алгебраизуема с формулами эквивалентности $\Delta(p, q)$ и определяющими уравнениями $E(p)$. Тогда выполнены следующие условия:

- (R) $\vdash_L \Delta(p, p)$
- (Sym) $\Delta(p, q) \vdash_L \Delta(q, p)$
- (Tr) $\Delta(p, q), \Delta(q, r) \vdash_L \Delta(p, r)$
- (Con) $\bigcup_{i=1}^n \Delta(p_i, q_i) \vdash_L \Delta(f(p_1, \dots, p_n), f(q_1, \dots, q_n))$ для $f^n \in \mathcal{L}$
- (MP) $p, \Delta(p, q) \vdash_L q$

Доказательство. Условие (R) — перевод аксиомы $p \approx p$ эквациональной логики. (Sym), (Tr) и (Con) — переводы соответствующих правил.

Доказательство (окончание). Условие (MP) имеет вид $p, \rho(p \approx q) \vdash_L q$, что эквивалентно по (ALG1)

$$\tau p, \tau \rho(p \approx q) \models_{\mathcal{X}} \tau p.$$

Из $\tau p = E(p)$ и (ALG4) получаем, что последнее условие эквивалентно

$$E(p), \rho \approx q \models_{\mathcal{X}} E(p),$$

что доказуемо в эквациональной логике $E(p), \rho \approx q \vdash_{Eq} E(p)$.



Теорема

Компактная логика L алгебраизуема, если и только если найдется конечное множество формул $\Delta(p, q)$ и конечное множество равенств $E(p) = \{\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)\}$ такие, что

$$(R) \vdash_L \Delta(p, p)$$

$$(Sym) \Delta(p, q) \vdash_L \Delta(q, p)$$

$$(Tr) \Delta(p, q), \Delta(q, r) \vdash_L \Delta(p, r)$$

$$(Con) \bigcup_{i=1}^n \Delta(p_i, q_i) \vdash_L \Delta(f(p_1, \dots, p_n), f(q_1, \dots, q_n)) \text{ для } f^n \in \mathcal{L}$$

$$(ALG3) p \dashv\vdash_L \{\Delta(\delta_i(p), \epsilon_i(p))\}.$$

Многообразия и квазимногообразия

- Обобщенное квазитожество — это выражение вида

$$\bigwedge \Theta \Rightarrow \epsilon \approx \delta,$$

где $\Theta \cup \{\epsilon \approx \delta\} \subseteq \text{Eq}_{\mathcal{L}}$

- $\bigwedge \Theta \Rightarrow \epsilon \approx \delta$ — **квазитожество**, если Θ — конечно.

- $\mathcal{A} \models \bigwedge \Theta \Rightarrow \epsilon \approx \delta \Leftrightarrow$ для любой $\mathcal{A}$ -оценки

$$(\nu\alpha = \nu\beta \text{ для всех } \alpha \approx \beta \in \Theta) \Rightarrow \nu\epsilon = \nu\delta.$$

- Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется **(обобщенным) квазимногообразием** если он аксиоматизируем (обобщенными) квазитожествами, т.е. существует множество (обобщенных) квазитожеств Δ такое, что

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \Delta.$$

- Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется **многообразием (эквациональным классом)** если он аксиоматизируем тождествами.

Многообразия и квазимногообразия

Пусть $\mathcal{K}$ — класс алгебр.

- $\mathbb{I}(\mathcal{K})$ — класс алгебр, изоморфных алгебрам из $\mathcal{K}$;
- $\mathbb{H}(\mathcal{K})$ — класс гомоморфных образов алгебр из $\mathcal{K}$;
- $\mathbb{S}(\mathcal{K})$ — класс подалгебр алгебр из $\mathcal{K}$;
- $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ — класс прямых произведений алгебр из $\mathcal{K}$;
- $\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ — класс ультрапроизведений алгебр из $\mathcal{K}$.
- $\mathbb{U}(\mathcal{K}) :=$
 $\{\mathcal{A} \mid \text{если } \mathcal{B} \leq \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{B} \text{ конечно или счетно порождена, то } \mathcal{B} \in \mathcal{K}\}.$

$\mathcal{A}_e$ — одноэлементная алгебра, $|\mathcal{A}_e| = \{e\}$.

Многообразия и квазимногообразия

- $\mathbb{V}(\mathcal{K}) = \mathbb{HSP}(\mathcal{K})$ — наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathcal{K}$.
- Если $\mathcal{K}$ — многообразие, то $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{fsi}$, где $\mathcal{K}_{fsi}$ — класс конечно-порожденных подпрямо неразложимых алгебр из $\mathcal{K}$.
- $\mathbb{Q}(\mathcal{K}) = \mathbb{ISPP}_u(\mathcal{K} \cup \{\mathcal{A}_e\})$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathcal{K}$.
- $\mathbb{GQ}(\mathcal{K}) = \mathbb{UISP}(\mathcal{K} \cup \{\mathcal{A}_e\})$ — наименьшее обобщенное квазимногообразие, содержащее класс $\mathcal{K}$.

Теорема

Пусть логика L алгебраизуема относительно класса $\mathcal{K}$ с определяющими тождествами $E(p)$ и формулами эквивалентности $\Delta(p, q)$. Тогда L алгебраизуема относительно класса $\mathcal{K}'$ с определяющими тождествами $E'(p)$ и формулами эквивалентности $\Delta'(p, q)$, если и только если выполнены следующие условия:

- 1 $\models_{\mathcal{K}'} = \models_{\mathcal{K}}$
- 2 $\Delta(p, q) \dashv\vdash_L \Delta'(p, q)$
- 3 $E(p) = \models_{\mathcal{K}} E'(p)$

Следствие

Если логика L алгебраизуема относительно класса $\mathcal{K}$, то $\mathbb{GQK}$ — наибольший класс алгебр (и единственное обобщенное квазимногообразие), относительно которого L алгебраизуема, независимо от преобразователей.

Определение

Пусть L — алгебраизуемая логика. **Эквивалентная алгебраическая семантика** логики L — это наибольший класс алгебр, относительно которого L алгебраизуема.

- Классическая логика CL алгебраизуема [A. Tarski 1931].

Экв. алгебраическая семантика — многообразие **BA** булевых алгебр (ограниченных дистрибутивных решеток с дополнениями).

$$\Delta(p, q) = \{p \leftrightarrow q\}, E(p) = \{p = \top\} \\ (\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

- Интуиционистская логика Int алгебраизуема [T. Ogasawara 1936] ($CL = Int + \{p \vee \neg p\}$).

Экв. алгебраическая семантика — многообразие **HA** алгебр Гейтинга (псевдо-булевых алгебр).

$$\Delta(p, q) = \{p \leftrightarrow q\}, E(p) = \{p = \top\}$$

- Избыточная логика Нельсона $N3$ алгебраизуема [H. Rasiowa 1958].

Экв. алгебраическая семантика — многообразие N -решеток (квази-псевдо-булевых алгебр).

$$\Delta(p, q) = \{p \Leftrightarrow q\}, E(p) = \{p = \top\}$$

$(\varphi \Leftrightarrow \psi := (\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\sim\varphi \leftrightarrow \sim\psi))$ — сильная эквивалентность [А. Марков 1951]).

- Паранепротиворечивая логика Нельсона $N4$ алгебраизуема [S. Odintsov 2003] ($N3 = N4 + \{\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)\}$).

Экв. алгебраическая семантика — многообразие $N4$ -решеток.

$$\Delta(p, q) = \{p \Leftrightarrow q\}, E(p) = \{p = p \rightarrow p\}.$$