

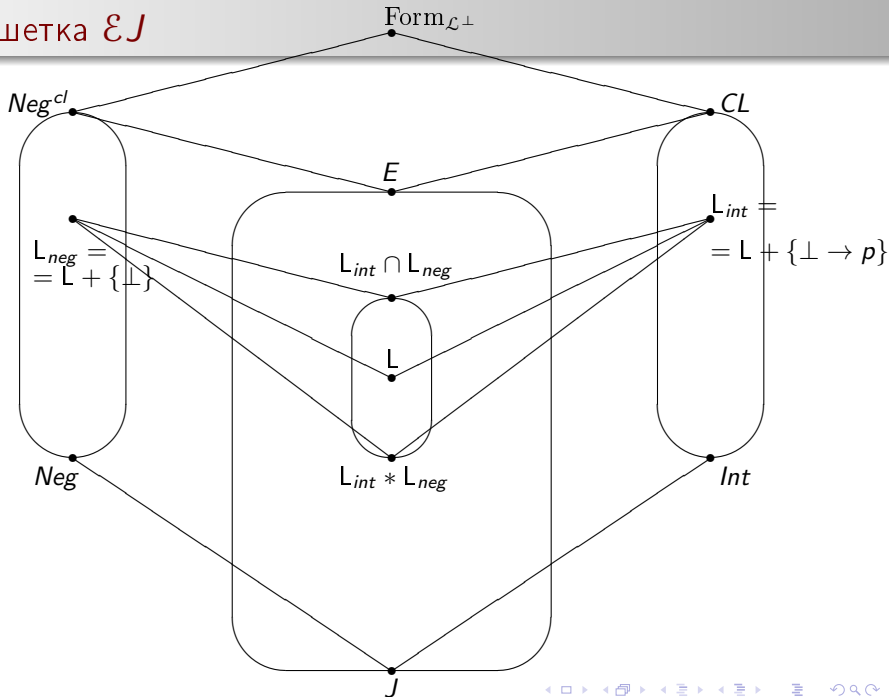
Алгебраические методы в неклассических логиках

Лекция 3

С.П. Одинцов

Институт математики им. С.Л.Соболева
`odintsov@math.nsc.ru`

МИАН 01.11.2023



- $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебры Гейтинга.
- $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ — алгебра Гейтинга с носителем $|\mathcal{A}| \cup (|\mathcal{B}| \setminus \{0_{\mathcal{B}}\})$ и порядком

$$a \leq_{\mathcal{A} + \mathcal{B}} b \Leftrightarrow (a \leq_{\mathcal{A}} b \text{ и } a, b \in |\mathcal{A}|) \vee (a \leq_{\mathcal{B}} b \text{ и } a, b \in |\mathcal{B}| \setminus \{0_{\mathcal{B}}\}) \\ \vee (a \in |\mathcal{A}| \text{ и } b \in |\mathcal{B}| \setminus \{0_{\mathcal{B}}\})$$

- $B_n = 2 + 2^n + 2, \quad C_n = 2 + 2^n, \quad n \geq 1$
- $\text{ch}_n = \langle \{0, \dots, n-1\}, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp \rangle, \quad 0 \leq \dots \leq n-1$

Примеры предтабличных логик

- $LQ_3 = Int + \{\neg p \vee \neg\neg p, p \vee (p \rightarrow (q \vee (q \rightarrow (r \vee \neg r))))\}$
[Hosoi, Ono 1970]

$$LQ_3 \subsetneq \dots \subsetneq LB_{n+1} \subsetneq LB_n \subsetneq \dots \subsetneq LB_1 \subsetneq LC_1 = HT \subsetneq CL \subsetneq Form_{\mathcal{L}^\perp}$$

- $LP_2 = Int + \{p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q))\}$ [Hosoi, Ono 1970]

$$LP_2 \subsetneq \dots \subsetneq LC_{n+1} \subsetneq LC_n \subsetneq \dots \subsetneq LC_1 = HT \subsetneq CL \subsetneq Form_{\mathcal{L}^\perp}$$

- $LC = Int + \{(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)\}$ [Dunn, Meyer 1971]

$$LC \subsetneq \dots \subsetneq Lch_{n+1} \subsetneq Lch_n \subsetneq \dots \subsetneq Lch_2 = CL \subsetneq Lch_1 = Form_{\mathcal{L}^\perp}$$

- $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — ч.у.м. (шкала Крипке для *Int*)
- $K \subseteq W$ — конус (относительно $\leq$), если для любых $a, b \in W$

$$(a \in K \text{ и } a \leq b) \Rightarrow b \in K$$

- $\mathcal{A}(\mathcal{W}) := \langle A(\mathcal{W}), \cup, \cap, \rightarrow, \emptyset \rangle$, где $A(\mathcal{W})$ — мн-во всех конусов относительно $\leq$ и для $X, Y \in A(\mathcal{W})$

$$X \rightarrow Y := \{a \mid \forall b \geq a (b \in X \Rightarrow b \in Y)\}.$$

$X \rightarrow Y$ — наибольший конус, содержащийся в $(W \setminus X) \cup Y$.

- $\mathcal{W}' = \langle K, \leq \cap K^2 \rangle$, где $K \in A(\mathcal{W})$. Тогда

$$X \mapsto X \cap K, \quad X \in A(\mathcal{W})$$

— эпиморфизм $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ на $\mathcal{A}(\mathcal{W}')$.

- **Лемма о вложении.** $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ и $\mathcal{W}' = \langle W', \leq' \rangle$ — шкалы, $\alpha : W \rightarrow W'$ — сюръекция такая, что для любых $a, b \in W$:

① $a \leq b \Rightarrow \alpha a \leq' \alpha b$,

② $\alpha a \leq' \alpha b \Rightarrow \exists b' (\alpha b = \alpha b' \text{ и } a \leq b')$.

Тогда $h : X \mapsto \alpha^{-1}(X)$ изоморфно вкладывает $\mathcal{A}(\mathcal{W}')$ в $\mathcal{A}(\mathcal{W})$

Простые фильтры

- $\mathcal{F}_I(\mathcal{A})$ — решетка фильтров на алгебре Гейтинга $\mathcal{A}$.
- Если $X \subseteq |\mathcal{A}|$, то $\langle X \rangle \in \mathcal{F}_I(\mathcal{A})$ — фильтр, порожденный X , т.е. наименьший фильтр, содержащий X .

$$\langle X \rangle = \{a \mid b_1 \wedge \dots \wedge b_n \leq a \text{ для некоторых } b_1, \dots, b_n \in X\}$$

- $F \in \mathcal{F}_I(\mathcal{A})$ называется **простым**, если F — собственный фильтр ($F \neq |\mathcal{A}|$) и для любых $a, b \in |\mathcal{A}|$

$$a \vee b \in F \Rightarrow (a \in F \text{ или } b \in F)$$

Лемма (о расширении)

Пусть $F \in \mathcal{F}_l(\mathcal{A})$ и $a \in |\mathcal{A}| \setminus F$. Тогда найдется простой фильтр P такой, что

$$F \subseteq P \text{ и } a \notin P.$$

Доказательство.

В множестве $\{F' \mid F \in \mathcal{F}_l(\mathcal{A}), F' \text{ собственный и } a \notin F'\}$ по принципу максимума найдется максимальный элемент P .

Допустим, что $b \vee c \in P$, но $b \notin P$ и $c \notin P$. Тогда $a \in \langle P \cup \{b\} \rangle \cap \langle P \cup \{c\} \rangle$, т.е. найдется $d \in P$ такие, что

$$b \wedge d \leq a \text{ и } c \wedge d \leq a.$$

Следовательно, $(b \wedge d) \vee (c \wedge d) = (b \vee c) \wedge d \leq a$. Т.о., $a \in P$, что противоречит выбору P .



Стоуновские представления

- $X(\mathcal{A})$ — мн-во всех простых фильтров на алгебре Гейтинга $\mathcal{A}$,
 $\mathcal{X}(\mathcal{A}) = \langle X(\mathcal{A}), \subseteq \rangle$
- $h(a) = \{P \mid P \in X(\mathcal{B}) \text{ и } a \in P\}$ — конус в $\mathcal{X}(\mathcal{A})$.
- $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{X}(\mathcal{A}))$ — изоморфное вложение. Если $\mathcal{A}$ конечна, то h — изоморфизм.
- $h(0) = \emptyset$
- $h(a \vee b) = h(a) \cup h(b)$, так как для любого $P \in X(\mathcal{A})$

$$a \vee b \in P \Leftrightarrow (a \in P \text{ или } b \in P)$$

- $h(a \wedge b) = h(a) \cap h(b)$, так как для любого фильтра F

$$a \wedge b \in F \Leftrightarrow (a \in F \text{ и } b \in F)$$

- $h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b)$, т.е. для любого $P \in X(\mathcal{A})$

$$a \rightarrow b \in P \Leftrightarrow \forall P' \supseteq P (a \in P' \Rightarrow b \in P').$$

$$\Rightarrow) a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$$

$\Leftarrow)$ Пусть $a \rightarrow b \notin P$. Если при этом $b \in \langle P \cup \{a\} \rangle$, то $a \wedge c \leq b$ для некоторого $c \in P$, откуда $c \leq a \rightarrow b \in P$.

Т.о., $b \notin \langle P \cup \{a\} \rangle$ и по лемме о расширении найдется $P' \in X(\mathcal{A})$ такой, что $P \cup \{a\} \subseteq P'$ и $b \notin P'$

- Если $a \neq b$, то $a \notin \langle b \rangle$ или $b \notin \langle a \rangle$. Допустим, что $b \notin \langle a \rangle$
- По лемме о расширении существует $P \in X(\mathcal{B})$ такой, что $\langle a \rangle \subseteq P$ и $b \notin P$, т.е. $h(a) \neq h(b)$

Т.о., отображение $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X(\mathcal{A}))$ разнозначно.

- Допустим, что $\mathcal{A}$ конечна и покажем, что h — сюръекция.
- Тогда всякий $P \in X(\mathcal{A})$ главный ($P = \langle a \rangle$) и всякий конус в $X(\mathcal{A})$ содержит конечное число минимальных по $\subseteq$ элементов.
- Пусть K — конус в $X(\mathcal{A})$ и $\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle$ — его минимальные элементы. Тогда

$$K = h(a_1 \vee \dots \vee a_n).$$

Лемма

Если $\mathcal{B} \in \mathbb{H}(\mathcal{A})$, то $\mathcal{X}(\mathcal{B})$ изоморфно конусу $\mathcal{X}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — эпиморфизм. Полагаем для $P \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$

$$\alpha(P) = h^{-1}(P),$$

Тогда α изоморфизм $\mathcal{X}(\mathcal{B})$ на

$$X' = \{P' \in \mathcal{X}(\mathcal{A}) \mid \text{Ker } h = h^{-1}(1_{\mathcal{B}}) \subseteq P'\}.$$

Очевидно, $\alpha(\mathcal{X}(\mathcal{B})) \subseteq X'$. Включение $X' \subseteq \alpha(\mathcal{X}(\mathcal{B}))$ следует из того, что

$$P' = h^{-1}h(P') = \alpha h(P') \text{ для } P' \in X'.$$

Действительно, пусть $a \in h^{-1}h(P')$. Тогда $h(a) = h(b)$ для $b \in P'$, т.е. $a \leftrightarrow b \in \text{Ker } h \subseteq P'$. Из $b, b \rightarrow a \in P'$ получаем $a \in P'$.



Лемма

Пусть $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. Тогда существует $\alpha : \mathcal{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{B})$ — сюръекция такая, что для любых $P, Q \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$:

- 1 $P \subseteq Q \Rightarrow \alpha P \subseteq \alpha Q$,
- 2 $\alpha P \subseteq \alpha Q \Rightarrow \exists Q' (\alpha Q = \alpha Q' \text{ и } P \subseteq Q')$.

Доказательство. Полагаем $\alpha P = P \cap B$ для $P \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$ ($B = |\mathcal{B}|$).

Проверим условие (2). Пусть $P \cap B \subseteq Q \cap B$. Предположим $a \wedge b = 0$ для $a \in P$ и $b \in Q \cap B$. Тогда $a \leq \neg b$ и $\neg b \in P \cap B \subseteq Q \cap B$, противоречие. Следовательно $F' := \langle P \cup (Q \cap B) \rangle \neq |\mathcal{A}|$.

Проверим, что $\alpha Q = \alpha F'$. С одной стороны,

$$Q \cap B \subseteq (P \cup (Q \cap B)) \cap B \subseteq F' \cap B.$$

Обратно, если $c \in F' \cap B$, то $c \geq a \wedge b$ для $a \in P$ и $b \in Q \cap B$.

Откуда $a \leq b \rightarrow c \in P \cap B \subseteq Q \cap B$. Итак, $b, b \rightarrow c \in Q \cap B$, поэтому $c \in Q \cap B$.

Доказательство (окончание). Мы доказали, что $F' \cap B = Q \cap B$, поэтому

$$Y = \{F \in \mathcal{F}_I(\mathcal{A}) \mid P \subseteq F \text{ и } F \cap B = Q \cap B\} \neq \emptyset.$$

По принципу максимума в множестве Y есть максимальный элемент Q' . Как в лемме о расширении показываем, что Q' — простой фильтр.

Т.о., мы построили простой фильтр Q' такой, что $\alpha Q = \alpha Q'$ и $P \subseteq Q'$.



- $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$ — шкала.
- Длина $lh(\mathcal{W})$ шкалы $\mathcal{W}$ — это супремум мощностей цепей в $\mathcal{W}$.
- Внешнее ветвление $d_1(a)$ элемента $a \in W$ — это мощность множества $D_1(a)$ всех максимальных последователей элемента a в $\mathcal{W}$.

$$d_1(\mathcal{W}) = \text{Sup}_{a \in W} d_1(a)$$

- Внутреннее ветвление $d_2(a)$ элемента $a \in W$ — это мощность множества $D_2(a)$ всех тех непосредственных последователей элемента a в $\mathcal{W}$, которые не являются максимальными в $\mathcal{W}$.

$$d_2(\mathcal{W}) = \text{Sup}_{a \in W} d_2(a).$$

Предтабличные многообразия

Предложение

Пусть $L \in \mathcal{E}Int$ и $Var(L)$ порождается классом $\mathcal{K}$ алгебр Гейтинга таких, что длина, внутреннее и внешнее ветвление шкал $\mathcal{X}(A)$, $A \in \mathcal{K}$, ограничены некоторым натуральным числом k . Тогда логика L является табличной.

Доказательство. Согласно теореме Биркгофа $Var(L)$ порождается также классом $(\mathbb{H}(\mathcal{K}))_{si}$.

Пусть $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathbb{H}(A)$. Тогда $\mathcal{X}(B)$ — конус $\mathcal{X}(A)$. Очевидно, что

$$lh(\mathcal{X}(B)) \leq lh(\mathcal{X}(A)), \quad d_i(\mathcal{X}(B)) \leq d_i(\mathcal{X}(A)), \quad i = 1, 2.$$

$\{1_B\}$ — простой фильтр в подпрямо неразложимой B . Поэтому в $\mathcal{X}(B)$ есть наименьший элемент. Поэтому шкала $\mathcal{X}(B)$ конечна и число ее элементов не превосходит

$$1 + k + k^2 + \dots + k^{k-1}.$$

Следовательно, $(\mathbb{H}(\mathcal{K}))_{si}$ содержит конечное число конечных алгебр и $Var(L)$ порождается их прямым произведением.

Предложение

Пусть $lh(\mathcal{X}(\mathcal{A})) \geq n \geq 1$. Тогда $ch_n \in \mathbb{S}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots \supseteq P_n$ — цепь простых фильтров на $\mathcal{A}$. Выберем $a_1, \dots, a_{n-1} \in |\mathcal{A}|$ такие, что $a_i \in P_i \setminus P_{i+1}$. Положим,

$$a'_1 := a_1 \vee \neg a_1, \quad a'_{i+1} := a_{i+1} \vee (a_{i+1} \rightarrow a'_i), \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Тогда $A_0 := \{0, a'_1, \dots, a'_{n-1}, 1\}$ — носитель подалгебры $\mathcal{A}_0 \leq \mathcal{A}$, изоморфной ch_n .

$$a'_i \leq a_{i+1} \rightarrow a'_i \leq a_{i+1} \vee (a_{i+1} \rightarrow a'_i) = a'_{i+1},$$

поэтому A_0 — цепь. Осталось проверить замкнутость относительно $\rightarrow$. По определению $a'_i \leq a'_{i+1}$.

$$a'_{i+1} \rightarrow a'_i = (a_{i+1} \vee (a_{i+1} \rightarrow a'_i)) \rightarrow a'_i = (a_{i+1} \rightarrow a'_i) \wedge ((a_{i+1} \rightarrow a'_i) \rightarrow a'_i) \leq a'_i$$

ввиду $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$. Таким образом, $a'_{i+1} \rightarrow a'_i = a'_i$. ■

Предложение

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое многообразие алгебр Гейтинга и $d_2(\mathcal{X}(\mathcal{A})) \geq n \geq 1$ для некоторой конечной $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$. Тогда $B_n \in \mathcal{V}$.

Доказательство. Пусть $d_2(a) \geq n$ для $a \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$, и $b_1, \dots, b_n$ — различные элементы из $D_2(a)$. Поскольку $\mathcal{A}$ конечна, $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}(\mathcal{X}(\mathcal{A}))$.

Пусть $K = \{b \in \mathcal{X}(\mathcal{A}) \mid a \leq b\}$, тогда $\mathcal{A}(K) \in \mathbb{H}(\mathcal{A})$. Положим

$$\alpha a = a, \alpha b_i = b_i, \alpha x = d \text{ для } x \in K \setminus \{a, b_1, \dots, b_n\},$$

где d — наибольший элемент в $K' = \{a, b_1, \dots, b_n, d\}$. Тогда $\alpha : K \rightarrow K'$ — сюръекция, удовлетворяющая условиям леммы о вложении. Поэтому

$$B_n \cong \mathcal{A}(K') \leq \mathcal{A}(K) \in \mathbb{H}(\mathcal{A}).$$



Предложение

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое многообразие алгебр Гейтинга и $d_1(\mathcal{X}(\mathcal{A})) \geq n \geq 1$ для некоторой конечной $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$. Тогда $C_n \in \mathcal{V}$.

Доказательство. Пусть $d_1(a) \geq n$ для $a \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$, и $c_1, \dots, c_n$ — различные элементы из $D_1(a)$. Поскольку $\mathcal{A}$ конечна, $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}(\mathcal{X}(\mathcal{A}))$. Пусть $K = \{b \in \mathcal{X}(\mathcal{A}) \mid a \leq b\}$, тогда $\mathcal{A}(K) \in \mathbb{H}(\mathcal{A})$. Положим

$$\alpha a = a, \quad \alpha c_i = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$$\alpha b = c_n \text{ для } b \in K \setminus \{a, c_1, \dots, c_{n-1}\}.$$

Пусть $K' = \{a, c_1, \dots, c_n\}$. Тогда $\alpha : K \rightarrow K'$ — сюръекция, удовлетворяющая условиям леммы о вложении. Поэтому

$$C_n \cong \mathcal{A}(K') \leq \mathcal{A}(K) \in \mathbb{H}(\mathcal{A}).$$



Предложение

Пусть $L \in \mathcal{E}Int$ и длины шкал $\mathcal{X}(A)$, где $A \in Var(L)$, неограничены. Тогда $LC \subseteq L$.

Доказательство. По одному из предшествующих предложений $ch_n \in Var(L)$ для любого n . Алгебры ch_n порождают $Var(LC)$. Поэтому $Var(LC) \subseteq Var(L)$, что эквивалентно $L \subseteq LC$.



Предложение

Пусть $L \in \mathcal{E}Int$ не является табличной и финитно аппроксимируема (т.е. каждая $\varphi \notin L$ опровергается на конечной $\mathcal{A} \in Var(L)$), причем длины шкал $\mathcal{X}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} \in Var(L)$, ограничены. Тогда $LQ_3 \subseteq L$ или $LP_2 \subseteq L$.

Доказательство. Поскольку логика не является табличной, а длины шкал $\mathcal{X}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} \in Var(L)$, ограничены, то либо внутреннее либо внешнее ветвление шкал $\mathcal{X}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} \in Var(L)$, является неограниченным.

Если неограничено внутреннее ветвление, то все B_n лежат в $Var(L)$. Следовательно, $Var(LQ_3) \subseteq Var(L)$, что эквивалентно $L \subseteq LQ_3$.

Если неограничено внешнее ветвление, то все C_n лежат в $Var(L)$. Следовательно, $Var(LP_2) \subseteq Var(L)$, что эквивалентно $L \subseteq LP_2$.



Теорема (А.В. Кузнецов, 1971)

Всякая предтабличная суперинтуиционистская логика является финитно аппроксимируемой.

Теорема (Л.Л. Максимова, 1972)

Класс $\mathcal{E}Int$ содержит в точности три предтабличные логики:

$$LC \quad := \quad Int + \{(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)\},$$

$$LP_2 \quad := \quad Int + \{p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q))\},$$

$$LQ_3 \quad := \quad Int + \{\neg p \vee \neg\neg p, p \vee (p \rightarrow (q \vee (q \rightarrow (r \vee \neg r))))\}.$$

Теорема (М. И. Верхозина, 1978)

Класс $\mathcal{E}Neg$ содержит в точности две предтабличные логики:

$$\begin{aligned} NC &:= Neg + \{(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)\}, \\ NP_2 &:= Neg + \{p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q))\}, \end{aligned}$$

Теорема (Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн, 2016)

Класс $\mathcal{E}J$ содержит в точности семь предтабличные логики: предтабличные расширения логик Int и Neg , а также

$$\begin{aligned} PJ6 &:= J + \{p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q)), \perp \rightarrow (p \vee (p \rightarrow q)), p \vee \neg p\}, \\ PJ7 &:= J + \{p \vee (p \rightarrow (q \vee \neg q)), \perp \rightarrow (p \vee (p \rightarrow q)), \\ &\quad \neg(\perp \rightarrow p), \neg p \vee \neg\neg p\}, \end{aligned}$$