

**Так ли прост надкритический случай в теории ветвящихся
процессах в случайной среде?**

В. И. Афанасьев

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство и Δ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ с метрикой полной вариации. Рассмотрим случайные элементы Q_1, Q_2, \dots , отображающие $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в Δ . Последовательность $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ называется случайной средой.

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС), если $Z_0 = 1$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

где предполагается, что при фиксированной случайной среде Π случайные величины $\{\xi_i^{(n)}, i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_0\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots$ одинаково распределены с распределением Q_{n+1} . На языке ветвящихся процессов Z_n – численность частиц n -го поколения, $\xi_i^{(n)}$ – число непосредственных потомков i -ой частицы из n -го поколения. Обозначим $\varphi_n(\cdot)$ производящую функцию (случайного) распределения Q_n при $n \in \mathbf{N}$.

Положим при $i \in \mathbf{N}$

$$X_i = \ln \varphi'_i(1), \quad \eta_i = \frac{\varphi''_i(1)}{(\varphi'_i(1))^2}$$

(при этом считаем, что $\varphi'_1(1), \varphi''_1(1) \in (0, +\infty)$ п.н.). Введем *сопровождающее случайное блуждание*: $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \in \mathbf{N}$. Заметим, что случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ для рассматриваемого ВПСС являются независимыми и одинаково распределенными. ВПСС называется 1) *надкритическим*, если $\mathbf{E}X_1 > 0$, 2) *критическим*, если $\mathbf{E}X_1 = 0$, 3) *докритическим*, если $\mathbf{E}X_1 < 0$.

В теории надкритических ВПСС первоначально использовался так называемый *мартингальный метод*. Он основан на том факте, что случайная последовательность $W_n := Z_n \exp(-S_n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, является мартингалом. По теореме Дуба существует п.н. $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$. На основе мартингального метода были установлены необходимые и достаточные условия невырожденности случайной величины W , затем были получены теоремы о сходимости W_n к W в L_p и оценки скорости этой сходимости. Дальнейшее применение мартингального метода связано с усложнением модели ВПСС: 1) рассмотрение ВПСС с иммиграцией, 2) рассмотрение многотипного ВПСС и т.п.

Казалось, что изучение надкритических однотипных ВПСС без иммиграции завершено. Это на фоне бурно развивающейся теории критических и особенно докритических ветвящихся процессов, при изучении которых была введена дополнительная классификация, свидетельствовало о некоторой простоте надкритического случая.

Следующий этап в изучении надкритических ВПСС, начавшийся в 2014-м году, связан с рассмотрением больших уклонений величины Z_n . При рассмотрении событий, касающихся малых значений Z_n , Бансайе и Боингхоф установили, что асимптотика вероятностей таких событий существенно зависит от *типа* рассматриваемого процесса (*сильно, слабо или промежуточно надкритический*). Автор изучал вероятность удаленного вырождения ВПСС (это означает, что $Z_n > 0$ и существует такое $k \in \mathbf{N}$, что $Z_{n+k} = 0$). Оказывается, асимптотика вероятности удаленного вырождения при $n \rightarrow \infty$ существенно зависит от типа надкритического ВПСС.

При получении указанных результатов существенную роль играет *метод условных предельных теорем для случайных блужданий* (эта область теории вероятностей активно развивается с 70-х годов прошлого столетия). В качестве примера применения указанного метода рассмотрим функциональную предельную теорему для *слабо надкритического* ВПСС (это означает, что $\mathbf{E}X_1 > 0$ и $-\infty < \mathbf{E}X_1 e^{-X_1} < 0$). Введем случайный процесс: $Y_n(t) = Z_{\lfloor nt \rfloor} \exp(-S_{\lfloor nt \rfloor})$ при $t \in [0, 1]$ и $Y_n(1) = Z_n$. Введем момент вырождения процесса $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$: $T = \min\{n > 0 : Z_n = 0\}$. Положим $\theta(t) = \mathbf{E} \exp(-tX_1)$ и $\gamma = \inf_{t \in [0, 1]} \theta(t)$. Пусть символ \Rightarrow означает сходимость конечномерных распределений процессов.

Теорема. *Если процесс $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ является слабо надкритическим и выполнены некоторые дополнительные предположения, то при $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{P}(n < T < +\infty) \sim c_1 \frac{\gamma^n}{n^{3/2}},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная, и

$$\{Y_n(t), t \in [0, 1] \mid n < T < +\infty\} \Rightarrow \{Y(t), t \in [0, 1]\},$$

где $\{Y(t), t \in [0, 1]\}$ – случайный процесс с неотрицательными постоянными траекториями на $(0, 1)$, причем вероятность события $\{Y(t) > 0\}$ положительна при $t \in (0, 1)$; величина $Y(1)$ принимает значения из \mathbf{N} .

Об экспоненциальной скорости сходимости в локальной теореме восстановления

Г. А. Бакай

Математический институт им. В.А. Стеклова, Москва, Россия

Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ образует неразложимую цепь Маркова с конечным множеством состояний. Пусть случайные величины $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, независимы при условии цепи, и условное распределение ξ_n зависит только от значений X_{n-1} и X_n . Положим $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ и введем функцию восстановления

$$u_k := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k).$$

Теория восстановления для таких процессов активно развивалась в работах [1], [2], причем рассматривались значительно более общие цепи $\{X_n\}_{n \geq 0}$. Из результатов указанных работ вытекает, что последовательность $\{u_k\}_{k \geq 0}$ сходится, значение предела вычисляется явно. Результаты о степенной скорости сходимости при дополнительных предположениях получены в работе [3].

В настоящей работе доказано, что при некоторых дополнительных условиях, имеет место экспоненциальная скорость сходимости величин u_k , $k \geq 0$, а именно, найдутся такие величины $C, B_0 > 0$, $B_1 > 1$, что справедливо соотношение

$$|u_k - C| \leq B_0 B_1^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Аналогичный результат получен в работе [4], однако, метод настоящего исследования отличается в значительной степени и позволяет получить выражение для параметра B_1 .

Работа выполнена в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-265).

Список литературы

- [1] Kesten H. *Renewal theory for functionals of a Markov Chain with general state space*. The Annals of Probability, 2(3), 1974, 355–386.
- [2] Athreya K. B., McDonald D., Ney P. *Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains*. The Annals of Probability, 6(5), 1978, 788–797.
- [3] Fuh C.-D., T.L.Lang T.L. *Asymptotic expansions in multidimensional Markov renewal theory and first passage times for Markov random walks*, Advances in Applied Probability, 33(3), 2001, 652–673.
- [4] Заславский А.Е. *Оценка скорости сходимости в теореме восстановления для случайных величин, заданных на цепи Маркова*. Теория вероятн. и ее примен., 17(3), 563–573.

Асимптотическая форма ветвящегося случайного блуждания на периодических графах

Е. Вл. Булинская

Кафедра математической статистики и случайных процессов,

механико-математический факультет,

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия

Среди различных моделей ветвящихся случайных блужданий (ВСБ), получивших широкое распространение в последние годы (см., например, [5], [8], [13] и [17], особое место занимают каталитические ВСБ или ВСБ в неоднородной среде. Их особенностью является наличие особых точек в пространстве, только находясь в которых, частицы, совершающие случайное блуждание, могут также производить потомков или гибнуть. Говорят, что эти точки содержат “катализаторы”, их также называют источниками размножения и гибели частиц или источниками ветвления. В первых работах на эту тему, среди которых отметим [1] и [4], рассматривался единственный источник ветвления. Далее, например, в статьях [14] и [16], предполагалось, что имеется конечное число произвольно расположенных источников в \mathbb{Z}^d . В работах [2] и [3] авторы рассмотрели ВСБ с множеством Γ источников ветвления, имеющим периодическую структуру, и назвали его ВСБ на периодических графах. Интересно, что при изучении каталитических ВСБ менялись не только модели, но и постановки задач. Так, важную роль играли классификация на надкритические, критические и докритические ВСБ, анализ асимптотического по времени поведения общих и локальных численностей частиц, а позднее задачи выявления предельной формы случайного облака частиц, распространяющегося в пространстве с течением времени.

Данный доклад посвящен исследованию эволюции пространственного распространения популяции частиц в ВСБ на периодических графах. Предполагается, что режим ветвления надкритический, а случайное блуждание имеет “легкие” хвосты. Нами установлено, что в метрике Хаусдорфа нормированное множителем t^{-1} случайное облако частиц, существующих в рассматриваемом ВСБ в момент времени t , сходится для почти всех точек события невырождения популяции к множеству $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, называемому асимптотической формой популяции ВСБ, когда $t \rightarrow \infty$. Также найдена явная формула, описывающая предельное множество \mathcal{P} . Если все источники ветвления имеют одни и те же параметры и расположены периодически на \mathbb{Z}^d , то описание \mathcal{P} вовлекает экспоненциальные моменты времени и места первого достижения (или первого возвращения) случайным блужданием множества Γ . Если же рассматривается более общая ситуация, когда источники ветвления имеют различные характеристики (например, в одном источнике частицы только дают потомков, а в другом – только гибнут) и расположены периодически, то \mathcal{P} выражается с помощью вспомогательных множеств, порожденных определенными функциями от перроновых корней некоторых семейств неотрицательных матриц, построенных на основе средних численностей потомков в разных источниках и некоторых ха-

рактеристик инфинитезимального оператора случайного блуждания. Мы рассматриваем несколько примеров и демонстрируем способы нахождения соответствующих множеств \mathcal{P} .

Основная идея доказательств наших результатов состоит в рассмотрении ВСБ на периодических графах в рамках многотипного общего ВСБ, изученного, например, в работах [6] и [7]. Кроме того, применяется аппарат преобразования Лапласа, введение вспомогательного многотипного марковского ветвящегося процесса, теория неразложимых неотрицательных и квазинеотрицательных матриц (в частности, теорема Перрона-Фробениуса).

Выполненное исследование дополняет результаты о пространственном распространении ВСБ с конечным числом источников ветвления, полученные, например, в [9]–[11], [12], [15] и [16].

Список литературы

- [1] Ватутин В.А., Топчий В.А., Ху Ю. *Ветвящееся случайное блуждание по решетке \mathbb{Z}^4 с ветвлением лишь в начале координат.* Теория вероятн. примен., 56(2), 2011, 224–247.
- [2] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке \mathbb{Z}^d с периодическими источниками ветвления.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 466, 2017, 234–256.
- [3] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Ветвящиеся случайные блуждания на \mathbb{Z}^d с периодически расположеными источниками ветвления.* Теория вероятн. примен., 64(2), 2019, 283–307.
- [4] Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B. *Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 326, 1998, 975–980.
- [5] Bai T., Rousselin P. *Branching random walks conditioned on particle numbers.* J. Stat. Phys., 185(3), 2021, 1–15.
- [6] Biggins J.D. *The Asymptotic Shape of the Branching Random Walk.* Adv. Appl. Probab., 10(1), 1978, 62–84.
- [7] Biggins J.D. *How fast does a general branching random walk spread?* In: Athreya, K.B., Jagers, P. (Eds), Classical and Modern Branching Processes. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 84, 19–39. Springer, New York, 1997.
- [8] Brunet E., Le A.D., Mueller A.H., Munier S. *How to generate the tip of branching random walks evolved to large times.* EPL, 131(4), 2020, 40002.
- [9] Bulinskaya E.Vl. *Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice.* Stoch. Process. Appl., 128(7), 2018, 2325–2340.
- [10] Bulinskaya E.Vl. *Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails.* J. Theor. Probab., 34(1), 2021, 141–161.
- [11] Bulinskaya E.Vl. *Catalytic branching random walk with semi-exponential increments.* Math. Popul. Stud., 28(3), 2021, 123–153.
- [12] Carmona Ph., Hu Y. *The spread of a catalytic branching random walk.* Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 50(2), 2014, 327–351.

- [13] Chernoussova E., Hryniv O., Molchanov S. *Branching random walk in a random time-independent environment*. Math. Popul. Stud., 30(2), 2023, 73–94.
- [14] Doering L., Roberts M. *Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory*. In: Donati-Martin C., Lejay A., Rouault A. (Eds.), Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Mathematics, 2078, 2013, 305–322.
- [15] Liu R. *The Spread Speed of Multiple Catalytic Branching Random Walks*. Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser., 39(2), 2023, 262–292.
- [16] Молчанов С.А., Яровая Е.Б. *Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным числом центров генерации частиц*. ДАН, 446(3), 2012, 259–262.
- [17] Shi Z. *Branching random walks*. École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XLII – 2012, Lect. Notes Math., 2151, 2015.

Критические ветвящиеся процессы в неблагоприятной случайной среде

В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

К.Донг

Ксиданский университет, Сиань, Китай

Пусть $\mathcal{Z} = \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим $F_n = \{F_n\{1\}, F_n\{2\}, \dots\}$ распределение числа потомков у частиц $(n-1)$ -го поколения. Пусть $F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_n\{k\} s^k$. Последовательность

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1,$$

где $X_i = \log F'_i(1), i = 1, 2, \dots$, называется сопровождающим случайнм блужданием для процесса \mathcal{Z} . Пусть

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| < 1\}$$

— подмножество в пространстве \mathbb{R}^2 . Для пары $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X мы будем писать $X \in \mathcal{H}(\alpha, \beta)$, если распределение величины X принадлежит (без центрирования) области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G(w) = \exp \left\{ -c|w|^{\alpha} \left(1 - i\beta \frac{w}{|w|} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0.$$

Наложим следующие условия.

Условие B1. Приращения $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ сопровождающего случайного блуждания независимы, одинаково распределены и принадлежат $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$. Более того, распределение случайной величины X_1 абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на множестве \mathbb{R} , причем существует натуральное число n такое, что плотность распределения случайной величины S_n ограничена.

Напомним, что ВПСС \mathcal{Z} называется критическим, если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ п. н. и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ п. н. Заметим, что если выполнено условие B1, то процесс является критическим и существует такая последовательность положительных чисел a_n , что распределение случайной величины S_n/a_n слабо сходится к распределению случайной величины с характеристической функцией $G(w)$.

Пусть

$$\gamma(b) = \frac{\sum_{k=b}^{\infty} k^2 F(\{k\})}{(\sum_{i=b}^{\infty} i F(\{i\}))^2}.$$

Условие B2. Существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbb{E} \log^{\alpha+\varepsilon} (\max(1, \gamma(b))) < \infty.$$

Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема. Пусть выполнены условия $B1$ и $B2$, $\min(m, n) \rightarrow \infty$ и $m = o(n)$.
Тогда

1) если $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $\varphi(n) = o(a_m)$, то для любого $z \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{a_m} \log Z_{n-m} \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0 \right) = A_1(z);$$

2) если $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $\varphi(n) \sim Ta_m$, $T \in (0, \infty)$, то для любого $z \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{a_m} \log Z_{n-m} \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0 \right) = B(z, T);$$

3) если $m = o(\varphi(n))$, $\varphi(n) = o(a_n)$, то для любого $z \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{a_m} (\log Z_{n-m} - S_n) \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0 \right) = A_2(z),$$

где $A_1(z)$, $A_2(z)$ и $B(z, T)$ – различные собственные функции распределения.

Исследование В. А. Ватутина и Е. Е. Дьяконовой выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-265).

Работа В. А. Ватутина и К. Донга была также поддержана Министерством Науки и Технологии КНР (грант G2022174007L).

Список литературы

[1] Ватутин В.А., Донг К., Дьяконова Е.Е., Случайные блуждания, оставшиеся неотрицательными, и ветвящиеся процессы в неблагоприятной среде, Матем. сб., 214(11), 2023 (в печати).

**О положительной возвратности процесса рождения и гибели и
системы $M/GI/1$**
А.Ю.Веретенников

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Москва, Россия

В знаменитой работе [1] о телефонной станции с конечным числом серверов Б.А.Севастьянов доказал факт сходимости по метрике полной вариации распределения соответствующего процесса к стационарному. Само это распределение без доказательства указано в публикации R. Fortet. Единственным условием в [1] была конечностность $\mu^{-1} := \int_0^\infty x dF(x)$ для времени обслуживания с ф.р. F . Позже возникли обобщения этой работы на бесконечные системы, где предполагалось еще, нестрого говоря, $\mu > \lambda$, где λ – интенсивность входящего пуассоновского потока требований. Затем появились работы с оценками на скорость сходимости, методика которых была сперва опробована на системах типа $M_n/GI/1/\infty$ [3] и др.; в них предполагалось существование *интенсивности обслуживания*. В данной работе для процесса рождения и гибели (РГ) изучена *положительная возвратность*, влекущая скорость сходимости порядка $1/t$ к стационарному распределению, с приложением к системе $M_n/GI/1/\infty$ (без использования существования интенсивности обслуживания), где интенсивность входящего потока λ_n может зависеть от числа n заявок в очереди. Оценку скорости сходимости порядка $1/t$ тут можно получить и иначе, методами теории восстановления; это не эквивалентно положительной возвратности и использует иные условия. Соотношение между двумя подходами требует дополнительных исследований. Для (неотрицательного) процесса РГ, обозначаемого через X_n , предполагаем, что найдутся $\delta, r_i > 0$ такие, что (индекс i в E_i означает начальное условие (н.у.))

$$\Delta_i^2 = \sup_{i>N} \sum_{j=0}^{\infty} (j-i)^2 p_{i,j} \leq 2r_i - \delta, \quad \& \quad b_i := \sum_{j=0}^{\infty} (j-i)p_{i,j} \leq -\frac{r_i}{i}, \quad \forall i > 0. \quad (1)$$

Теорема. При условии (1) для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$E_i \tau_0^X \leq \delta^{-1} i^2, \quad \text{где } \tau_0^X := \inf(n \geq 0: X_n = 0).$$

Перейдем к системе $M_n/GI/1/\infty$. Входящий поток – условно пуассоновский с интенсивностью λ_n , все обслуживания независимы; если сервер занят, то заявка становится в очередь, ограничений на которую нет; дисциплина обслуживания FIFO. Процесс $Y_t = (n_t, y_t)$ описывается переменными n_t – числом требований в очереди – и y_t – перескоком в терминологии ТМО; при $n = 0$ считаем $y := 0$. Предполагаем $0 < C^{-1} \leq \lambda_n \leq C < \infty, \forall n$. Применен известный метод – рассматривать процесс Y_t в моменты (T_k) окончаний очередных обслуживаний. Эта вложенная цепь Маркова $X_k = n_{T_k}$ является процессом РГ, переходные вероятности p_{ij} которого выписываются в терминах преобразований Лапласа ф.р. F ; имеем $p_{i,j} = 0, j < i - 1$. Такой подход к исследованию *стационарного распределения* систем $M_n/GI/1$

при условии его существования (напомним, что существование последнего положительная возвратность обеспечивает) реализован в [2] и др.; рекурентные свойства в [2] не изучались. Есть надежда, что методы данной работы удастся применить и к системам типа Эрланга – Севастьянова.

Теорема. *Пусть для вложенной цепи X_n в системе $M_n/GI/1/\infty$ выполнено условие (1). Тогда для момента остановки $\tau_0^Y := \inf(t \geq 0 : n(Y_t) = 0)$ найдется такое $K > 0$, что $\forall n.y. (n, 0)$,*

$$\mathbb{E}_{n,0}\tau_0^Y \leq Kn^2.$$

Теорема. *Пусть для системы $M_n/GI/1/\infty$ найдется $r > 2 + 2 \sup_n \lambda_n$ такое, что для “интегральной интенсивности” $H(t) := \int_0^t (1 - F(s))^{-1} dF(s) < \infty, \forall t$,*

$$\forall 0 \leq t \leq 1, \int_0^t (1+s) dH(s) \geq rt, \quad \& \quad \forall \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1, \inf_{x \geq 1} \int_0^\Delta (1+x+s) dH(x+s) \geq r\Delta.$$

Тогда $\forall 0 \leq x \leq 1/2 \exists a > 0$ такое, что $\inf_{0 \leq x' \leq x} F(x' + a) - F(x') > 0$, и, более того, $\exists K > 0$ такое, что $\forall n.y. (n, y)$ с $y \geq 0$ (sic: в правой части нет квадрата),

$$\mathbb{E}_{n,y}\tau_0^Y \leq K(n + y + 1).$$

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”.

Список литературы

- [1] Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. ТВП, 2(1), 1957, 106–116.
- [2] Abouee-Mehrizi H., Baron O. *State-dependent M/G/1 queueing systems*. Queueing Syst., 82, 2016, 121–148.
- [3] Veretennikov A.Yu., Zverkina G.A. *Simple proof of Dynkin’s formula for single-server systems and polynomial convergence rates*. MPRF, 20, 2014, 479–504.

Обзор работ Б.А.Севастьянова по дискретной математике

A.M.Зубков

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Планируется сделать краткий обзор публикаций Б.А.Севастьянова, посвященных вопросам дискретной математики и ее применений.

**Идеи Шеннона по перемешиванию и рассеиванию
в свете линейного и разностного методов в криптографии**

Ф.М. Малышев

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Основой доклада является работа автора: *Методы линейных и разностных соотношений в криптографии. Диск. мат.* **34:1** (2022), 36–63.

Для теоретической криптографии типичной является ситуация, когда для отображения двоичных векторных пространств $F: V_N \rightarrow V_M$, $a \mapsto b = F(a)$, $a \in V_N = GF(2)^N$, $b \in V_M$, рассматриваются вероятностные линейные и разностные соотношения. *Вероятностное линейное соотношение* представляется парой вектор-столбцов $L' \in V_N^*$, $L'' \in V_M^* \setminus \{0\}$, и записываем в виде $aL' \simeq bL''$. Оно характеризуется величиной $\delta_{L', L''} = \delta_{L', L''}^F = 2\mathbf{P}\{aL' = bL''\} - 1$, где вероятность вычисляется в условиях равномерного распределения вектор-строк a на V_N . *Вероятностное разностное соотношение* представляется векторами $D' \in V_N \setminus \{0\}$, $D'' \in V_M$ и обозначаем как $D' \sim D''$. Оно оценивается вероятностью $p_{D', D''} = p_{D', D''}^F = \mathbf{P}\{F(a+D') + F(a) = D''\}$. Использующие эти соотношения соответственно линейный и разностный методы криптографического анализа характеризуются следующими особенностями.

1) Предварительно получаемые вероятностные соотношения относятся к отображениям F , задаваемым сложно устроеными конкретными функциональными схемами (ф.с.) \mathcal{F} , реализующими глубокие и разветвлённые сумперпозиции большого числа локальных нелинейных отображений $f_i: V_{n_i} \rightarrow V_{m_i}$, $x_i \mapsto y_i = f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, составляющих нелинейную часть ф.с. \mathcal{F} . Переменные a, x_i, y_i, b линейно выражаются друг через друга: $(a, y_1, \dots, y_k)C_{\mathcal{F}} = (x_1, \dots, x_k, b)$. Здесь $C_{\mathcal{F}}$ верхнетреугольная матрица линейной среды, состоящая из линейных отображений ф.с. \mathcal{F} .

2) При построении вероятностных соотношений в качестве целевых функций, подлежащих максимизации, используют не точные значения $|\delta_{L', L''}|$ и $p_{D', D''}$, а некоторые их "приближения": $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}| = \prod_{i=1}^k |\delta_{l'_i, l''_i}^{f_i}|$, $\tilde{p}_{\mathfrak{D}} = \prod_{i=1}^k p_{d'_i, d''_i}^{f_i}$, где $\mathfrak{L} = ((l'_i, l''_i), i = 1, \dots, k)$, $\mathfrak{D} = ((d'_i, d''_i), i = 1, \dots, k)$ – множества локальных вероятностных соотношений, относящихся к отдельным f_i . Элементы множеств \mathfrak{L} и \mathfrak{D} должны быть согласованы линейной средой. Если, например, $x_i = y_j$, $i > j$, то $l''_j = l'_i$, $d'_i = d''_j$. Замены $|\delta_{L', L''}|$ на $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $p_{D', D''}$ на $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ производятся в отсутствии каких-либо утверждений о степени близости этих пар величин.

3) При окончательных расчётах эффективности методов анализа вместо требуемых величин $|\delta_{L', L''}|$ и $p_{D', D''}$ используют $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$.

При максимизации $|\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ ориентируются на множества \mathfrak{L} и \mathfrak{D} , в которых как можно больше номеров $i \in \{1, \dots, k\}$, для которых $l'_i = l''_i = 0$ или $d'_i = d''_i = 0$. Минимально возможные (при некоторых \mathfrak{L} и \mathfrak{D} соответственно) мощности совокупностей остальных значений i являются показателями

рассеивания θ_C и θ_C^* линейной среды $C = C_{\mathcal{F}}$, соответственно относительно линейного и разностного методов.

Приведённые особенности являются источником справедливой критики линейного и разностного методов. Имеется даже пример семейства функциональных схем \mathcal{F}_c с линейной средой независящей от c , реализующих любое отображение $F_c: V_N \rightarrow V_M$. Параметр c принимает 2^{M2^N} значений. Локальные отображения $f_{i,c}$ зависят от c , но участвующие в поиске "лучших" вероятностных соотношений величины $|\delta_{l'_i, l''_i}^{f_{i,c}}|$ и $p_{d'_i, d''_i}^{f_{i,c}}$ от c не зависят. Это позволяет получать примеры самых экзотических соотношений между $\tilde{\delta}_{\mathfrak{L}}$ и $\delta_{L', L''}$, и между $\tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ и $p_{D', D''}$.

Теоремы о точных значениях $\delta_{L', L''}^F$ и $p_{D', D''}^F$, привлекающие в своих формулировках все возможные согласованные совокупности локальных соотношений \mathfrak{L} и \mathfrak{D} , дополнительно вскрывают недостатки методов:

- 4) находятся не самые лучшие соотношения, а какие получатся,
- 5) ориентация на $\tilde{\delta} = \max_{\mathfrak{L}} |\delta_{\mathfrak{L}}|$ и $\tilde{p} = \max_{\mathfrak{D}} \tilde{p}_{\mathfrak{D}}$ уводит из областей, где реализуются $\max |\delta_{L', L''}|$ и $\max p_{D', D''}$.

Последние недостатки очень ярко демонстрируются на одной конкретной ф.с. с решёткой структурой.

Не смотря на приведённые недостатки, величины $\tilde{\delta}$ и \tilde{p} , зависящие кстати от ф.с. \mathcal{F} , являются признанными характеристиками отображения F как шифрпреобразования. При синтезе ф.с. \mathcal{F} , пред назначаемых для шифраторов, формирование нелинейной части и линейной среды ф.с. \mathcal{F} осуществляется исходя из минимизации характеристик $\tilde{\delta}$ и \tilde{p} , что сопряжено с максимизацией показателей рассеивания θ_C , θ_C^* и с минимизацией максимальных значений $|\delta_{l'_i, l''_i}^{f_i}|$ по всем l'_i, l''_i и $p_{d'_i, d''_i}^{f_i}$ по всем d'_i, d''_i . Перечисленные требования практически повторяют предложения Шеннона по рассеиванию и перемешиванию при разработке шифраторов. Они упредупреждали опасность от двойственных друг другу линейного и разностного методов криптографического анализа, которые появятся спустя полвека.

Об объемах деревьев в лесах Гальтона-Ватсона

Ю. Л. Павлов

Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

Рассматривается лес Гальтона-Ватсона $F_{N,n}$ с N корневыми деревьями и n некорневыми вершинами. Случайная величина ξ , равная числу прямых потомков каждой частицы в образующем лес критическом ветвящемся процессе, имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau} \quad k = 0, 1, \dots \quad \tau \in (2, 3), \quad (2)$$

где $h(x)$ - медленно меняющаяся на бесконечности функция. Предельное поведение таких лесов изучалось в [1], где распределение ξ имеет конечный третий момент. Позднее было доказано, что если конечен только второй момент, результаты [1] сохраняют силу. Но распределение (1) имеет бесконечную дисперсию. Ветвящиеся процессы с таким распределением успешно используются при изучении структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких, как Интернет. В [2] впервые предложено с этой целью использовать и результаты о случайных лесах.

Для $F_{N,n}$ найдены предельные распределения числа деревьев заданного объема и максимального объема дерева в различных зонах стремления N и n к бесконечности. Один из новых результатов формулируется ниже.

Обозначим $\tilde{g}(x)$ плотность устойчивого закона с характеристической функцией

$$\exp \left\{ -c_1 \Gamma(2-\tau) |t|^{\tau-1} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(\tau-1)}{2} \right) \right) \cos \left(\frac{\pi(\tau-1)}{2} \right) \right\}, \quad (3)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, c_1 зависит от $h(x)$ и определяется соотношением (2.6.4) в [3]. Пусть $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией

$$\exp \left\{ -c \tilde{g}(0) \Gamma \left(\frac{\tau-2}{\tau-1} \right) |t|^{1/(\tau-1)} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2(\tau-1)} \right) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2(\tau-1)} \right) \right\},$$

где c определяется так же, как и c_1 в (2). Обозначим $B(x)$ стремящуюся к бесконечности положительную функцию, при $x \rightarrow \infty$ удовлетворяющую соотношению

$$B(x) \sim x^{1/(\tau-1)} l(x), \quad (4)$$

где $l(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. В [3] показано, что последовательность нормализующих констант в локальных предельных теоремах для устойчивых законов с показателем $1/(\tau-1)$ удовлетворяет условию (3). Для максимального объема дерева ν_{max} в $F_{N,n}$ получен такой результат.

Теорема. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что существует константа $\alpha > 0$ такая, что

$$\frac{n}{N^{\tau-1+\alpha}} \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{N + n - \nu_{max}}{u N^{\tau-1}} \leq z \right\} \rightarrow \int_0^z g(x) dx,$$

где u – корень уравнения

$$u = l^{1-\tau} B(u N^{\tau-1}).$$

Список литературы

- [1] Павлов Ю.Л. *Случайные леса*. Петрозаводск, Карельский научный центр РАН, 1996.
- [2] Павлов Ю.Л. *Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе*. Математический сборник, 212(9), 2021, 146–163.
- [3] Ибрагимов И.А., Линник Ю.Л. *Независимые и стационарно связанные величины*. М., Наука, 1965.

**Об одном функционале от числа непоявившихся цепочек в
полиномиальной схеме специального вида и о двухэтапном
критерии хи-квадрат**

М. П. Савелов

Кафедра теории случайных процессов и математической статистики,
механико-математический факультет, Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В докладе будут рассмотрены две задачи о предельном поведении статистик в полиномиальной схеме. Обе эти задачи связаны с исследованиями Б.А. Севастьянова.

Пусть ξ_{jl} , $1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq k$, — независимые случайные величины, имеющие полиномиальное распределение:

$$\mathbf{P}(\xi_{jl} = i) = p_i > 0, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq l \leq k.$$

Они образуют n независимых цепочек $(\xi_{11}, \dots, \xi_{1k}), (\xi_{21}, \dots, \xi_{2k}), \dots, (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk})$, принимающих значения во множестве $\{1, 2, \dots, M\}^k$. Число непоявившихся цепочек μ_0 вычисляется по формуле

$$\mu_0 = \sum_{(s_1, \dots, s_k) \in \{1, 2, \dots, M\}^k} I\{\eta^{(s_1, \dots, s_k)} = 0\},$$

где $\eta^{(s_1, \dots, s_k)} = \sum_{j=1}^n I\{(\xi_{j1}, \dots, \xi_{jk}) = (s_1, \dots, s_k)\}$. Очевидно, $\mu_0 < M^k$.

Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_M)$, $H = H(\vec{p}) = -\sum_{i=1}^M p_i \ln p_i$,

$$\hat{H} = \frac{\ln(M^k - \mu_0)}{k}.$$

В докладе будет обсуждаться подход А.М. Зубкова к оцениванию шенноновской энтропии, основанный на теореме Шеннона-Макмиллана-Бреймана и теории случайных размещений. Будет показано, что величина \hat{H} естественным образом связана с энтропией H распределения ξ_{11} .

Заметим, что \hat{H} является функционалом от μ_0 в полиномиальной схеме специального вида, которая не рассматривалась в [1]. Мы представим результаты о предельном поведении \hat{H} , изложенные в [2].

Кроме того, мы рассмотрим последовательный r -кратный критерий χ^2 (см. [3]) и в случае $r = 2$ исследуем асимптотические свойства вероятности ошибки как функции от размеров границ прямоугольной критической области. Установленные результаты позволяют найти асимптотику хвостов двумерных распределений процесса Бесселя. В докладе будут представлены результаты работы [4].

Список литературы

- [1] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Случайные размещения*. Наука, М. 1976

- [2] Савелов М. П. *Об одном функционале от числа появившихся неперекрывающихся цепочек исходов полиномиальной схемы и его связи с энтропией*. Матем. заметки, 114(3), 2023 (в печати).
- [3] Захаров В. К., Сарманов О. В., Севастьянов Б. А. *Последовательный критерий χ^2* Матем.сб. 79(121): 3(7), 1969, 444–460.
- [4] Савелов М. П. *Двухэтапный критерий χ^2 и двумерные распределения процесса Бесселя*. Теория вероятн. и ее примен., 65(4), 2020, 841–850.

Эволюция частиц на графе, ветвящиеся процессы Севастьянова, телефонные системы

В.А. Топчий, Н.В. Перцев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Омск,
Россия

При исследовании живых систем появляются модели у которых имеется несколько узлов с совокупностью частиц, развивающихся на основе одной из моделей ветвящихся процессов, которые связаны направленными каналами для переходов частиц между узлами, что можно интерпретировать как эволюцию частиц на ориентированном графе. Переходы частиц в каналы регулируются независимыми случайными механизмами. В каналах происходит только перемещение частиц с ограничениями на время пребывания и возможностью гибели. На всех элементах графа распределения характеристик эволюции частиц различны. Следовательно, частица при переходах по элементам графа меняет свой тип. Если превращения частиц в узлах соответствуют марковскому процессу или описывается процессом Беллмана-Харриса, то условия на переходы частиц в каналах приводят к итоговому процессу Севастьянова (см. Б.А. Севастьянов, Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971). Исследования критического случая для описанной модели проводилось в работе В.А. Топчия и Н.В. Перцева (*Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, **20**:1, 465–476). Для приложений часто важна неоднородность характеристик эволюции по времени. В этом случае анализ систем возможен только с помощью имитационного моделирования. Однородные по времени модели хорошо описываются традиционными предельными теоремами для процессов Севастьянова.

Рассмотрен частный случай модели, где в каждый узел входит внешний Пуассоновский поток частиц. Далее частицы могут либо гибнуть либо случайным образом переходить в соседние элементы ориентированного графа. Эволюция частиц на каждом элементе графа определяется распределением двух независимых случайных величин: допустимой продолжительности жизни частицы и ее допустимым временем пребывания на этом элементе. Реализуется событие, появившееся раньше.

Данную модель удобнее исследовать в терминах теории массового обслуживания. Узловое свойство модели состоит в том, что при входящем Пуассоновском потоке в узел при любом распределении времени пребывания заявки в нем, численность заявок будет Пуассоновской. Данный результат восходит к работе Б.А. Севастьянова (ТВП, 1957, **2**:1, 106–116). Для выбранной модели описано стационарное распределение численности частиц на всех элементах графа для произвольных распределений допустимых времен пребывания частиц на элементах графа и их продолжительности жизни. В ряде частных случаев распределение численности частиц на элементах графа будет Пуассоновским с параметрами, описанными в явном виде в любой момент времени.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

**Асимптотика вероятности невырождения почти критических
ветвящихся процессов в случайной среде**

В.В. Харламов

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
Москва, Россия

Рассмотрим два семейства производящих функций

$$\{f_y, y \in Y\}, \quad \{f_{y,i,n}, y \in Y, 0 \leq i < n\},$$

где (Y, \mathcal{G}) – измеримое пространство. Последовательность $\Xi = \{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ независимых и одинаково распределенных случайных элементов со значениями в (Y, \mathcal{G}) будем называть *случайной средой*.

1. Положим $F_{k-1} := f_{\xi_k}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.
2. Разыграем независимые случайные величины (с.в.) $Y_{i,k}$ с п.ф. F_{k-1} , $i, k \in \mathbb{N}$.
3. Положим $Z_0 = 1$, $Z_k := \sum_{i=1}^{Z_{k-1}} Y_{i,k}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\mathcal{Z} = \{Z_k, k \geq 0\}$ будем называть *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС).

Положим

$$X_i := \log F'_{i-1}(1), \quad S_0 := 0, \quad S_k := X_1 + \dots + X_k, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_k, k \geq 0\}$ будем называть *сопровождающим случаем блужданием* (ССБ) для ВПСС \mathcal{Z} .

Условие 1.

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{D}X_1 \in (0, \infty).$$

Если условие 1 выполнено, то ВПСС \mathcal{Z} будем называть *критическим*. Козлов М. В. в работе [1] получил асимптотическое поведение $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ для критического ВПСС с дробно-линейной производящей функцией. Общий случай был рассмотрен Geiger J., Kersting G. в работе [2].

В настоящей работе мы изучаем переходные явления для вероятности невырождения ВПСС. Переходные явления для ветвящихся процессов без среды были изучены в непрерывном случае Севастьяновым Б. А. в работе [3], в дискретном случае Нагаевым С. В. и Мухамеджановой Н. В. в работе [4]. Для ВПСС Дьяконовой Е. Е. в работе [5] исследовались переходные явления в случае процессов с миграцией и иммиграцией.

Мы будем использовать существенно другую модель для исследования переходных явлений.

1. Положим $F_{k-1,n} := f_{\xi_k, k-1, n}$ при всех натуральных $k \leq n$.
2. Разыграем независимые с.в. $Y_{i,k,n}$ с п.ф. $F_{k-1,n}$ при всех натуральных i и $k \leq n$.

3. При каждом натуральном n определим набор $\{Z_{k,n}, k \leq n\}$. Положим $Z_{0,n} = 1$, $Z_{k,n} := \sum_{i=1}^{Z_{k-1,n}} Y_{i,k,n}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Набор с.в. $\{Z_{k,n}, 0 \leq k \leq n, Z_{0,n} = 1\}$ назовём *возмущённым ветвящимся процессом в случайной среде Ξ* (ВВПСС).

Условие 2. Введём обозначение

$$Q_n(C, \delta) := \bigcap_{k=1}^n \left\{ \left| \sum_{i=1}^k a_{i,n} \right| \leq Ck^{1/2-\delta} \right\}, \quad a_{i,n} := \log F'_{i-1,n}(1) - \log F'_{i-1}(1).$$

При некоторых $\delta \in (0, 1/2)$, $C > 0$

$$\sqrt{n} (1 - \mathsf{P}(Q_n(C, \delta))) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из условия 1 следует, что разность между ССБ для $Z_{k,n}$ и Z_k ограничена с вероятностью, близкой к 1.

Основной результат этой работы состоит в следующем утверждении.

Теорема. *При выполнении условий 1 и 2 и некоторых технических предположений справедлива эквивалентность*

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \mathsf{P}(Z_n > 0) \sim \Upsilon \frac{e^{-c_-}}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где Υ и c_- – положительные константы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, <https://rscf.ru/project/19-11-00111/> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Благодарности Автор глубоко признателен Шкляеву А. В. за постоянную поддержку работы.

Список литературы

- [1] Козлов М. В. *Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде*. Теория вероятностей и ее применения, 21(4), 1976, 813–825.
- [2] Geiger J., Kersting G. *The survival probability of a critical branching process in a random environment*. Theory of Probability & Its Applications, 45(3), 2001, 517–525.
- [3] Севастьянов Б. А. *Переходные явления в ветвящихся случайных процессах*. Теория вероятностей и ее применения, 4(2), 1959, 121–135.
- [4] Нагаев С. В., Мухамеджанова Н. В. *Переходные явления в ветвящихся процессах с дискретным временем*. Сб. Предельные теоремы и статистические выводы, 1966, 83–89.
- [5] Dyakonova E. *Transition phenomena for branching processes in a random environment*. Journal of Mathematical Sciences, 78, 1996, 48–53.

Время вырождения ветвящихся процессов с частицами двух полов с наибольшим начальным числом пар

А.В. Шкляев

Кафедра теории случайных процессов и статистики, механико-математический

факультет,

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия

Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный D. Daley в [1]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом* (ДВП). Пусть $f(t, s)$ – двумерная производящая функция, $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВП $\mathcal{N} = (N_n, n \geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}(N_{n+1} = j | N_n = i) = \mathbf{P}(L(U, V) = j),$$

где вектор (U, V) имеет п.ф. $f(s, t)^i$, $s, t \in [0, 1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0 = N$.

Дадим более понятную физическую интерпретацию процесса. Пусть $(X_{n,i}, Y_{n,i})$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}$, – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы. Построим процесс следующим образом. Изначально в нем есть N пар, j -я из которых дает $(X_{1,j}, Y_{1,j})$ потомков первого и второго пола. Из полученных x частиц первого пола и y частиц второго пола образуется $L(x, y)$ пар, которые, в свою очередь, вновь дают потомков по тому же закону и так далее. Отметим, что одна из наиболее естественных функций L имеет вид $L(x, y) = \min(x, y)$, соответствующий ДВП мы будем называть *ДВП с идеальной верностью*.

Будем называть ДВП с идеальной верностью *докритическим*, если $A = \min(\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y) < 1$, *критическим*, если $A = 1$ и *надкритическим*, если $A > 1$. Отдельно выделим дважды критический случай, когда $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1$.

Теорема. Пусть $\{N_n\}$ – ДВП с идеальной верностью с $N_0 = N$, T_N – время до вырождения процесса.

1. Пусть процесс докритический, $\mathbf{E}X^{1+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{1+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда

$$T_N - \ln N = O_P(1), \quad N \rightarrow \infty,$$

то есть

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|T_N - \ln N| > x) = 0.$$

2. Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{2+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{2+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда

$$\frac{T_N}{N} \xrightarrow{P} \frac{2}{\mu}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \mu = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho}}{\sqrt{2\pi}},$$

где σ_1^2 , σ_2^2 – дисперсии X и Y соответственно, а $\rho = \text{cov}(X, Y)$.

3. Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{5/2+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{5/2+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда

$$\frac{T_N - 2N/\mu}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2), \quad N \rightarrow \infty, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\pi\mu^3}((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\pi - 1) + 2\rho).$$

Первый результат теоремы принадлежит студенту МГУ М.Р. Абдушеву, второй – студентке МГУ А.Ю. Маркиной (оба получены под руководством автора), а третий – автору.

Аналогичные результаты можно получить и для процесса в случайной среде. Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный С. Ма в [2]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом в случайной среде* (ДВПСС).

Пусть $f(t, s; y)$ – двумерная производящая функция (по первым двум переменным) с параметром y , $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВПСС $\mathcal{N} = (N_n, n \geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}(N_{n+1} = j | N_n = i, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{P}(L(U, V, \eta_{n+1}) = j | \boldsymbol{\eta}),$$

где вектор (U, V) при условии $\boldsymbol{\eta}$ имеет п.ф. $f(s, t; \eta_{n+1})^i$, $s, t \in [0, 1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0 = N$.

Опять же естественная интерпретация предлагает рассматривать $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ – количества потомков одной пары первого и второго пола и полагать

$$N_{n+1} = L \left(\sum_{i=1}^{N_n} X_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} Y_{n+1,i}, \eta_{n+1} \right).$$

Случайные векторы $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ при фиксации среды предполагаются независимыми и имеющими распределение $f(s, t; \eta_n)$.

Назовем функцию паросочетаний $L(x, y; z)$ *почти липшицевой*, если найдется липшицева функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, обладающая свойством $g(x, cy, z) = cg(x, y, z)$, для которой при всех x, y, z

$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leq c(|x|^{1-\delta} + |y|^{1-\delta})$$

при некоторых положительных c и $\delta \in (0, 1)$.

Рассмотрим ДВПСС $\{N_n\}$ с почти липшицевой функцией паросочетаний L . Введем случайные величины

$$\xi_i = \ln g(\mathbf{E}_{\eta_i} X_{i,1}, \mathbf{E} Y_{i,1}, \eta_i)$$

и назовем $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \geq 0$, *случайным блужданием, сопровождающим ДВПСС* $\{N_n\}$. Будем называть процесс *докритическим* при $\mathbf{E}\xi_1 < 0$, *критическим* при $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и *надkritическим* при $\mathbf{E}\xi_1 > 0$.

Теорема. Пусть $\{N_n\}$ – ДВПСС с $N_0 = N$, T_N – время до вырождения процесса.

1. Пусть ДВПСС докритический, причем $\mathbf{E}X_{1,1}^{1+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^{1+\delta} < +\infty$ при некотором положительном δ . Тогда

$$T_N - \ln N \mathbf{E}\xi_1 = O_P(1), \quad N \rightarrow \infty.$$

2. Пусть ДВПСС критический, причем $\mathbf{E}X_{1,1}^2 < +\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^2 < +\infty$. Тогда

$$\frac{T_N}{\ln^2 N} \xrightarrow{d} Z, \quad N \rightarrow \infty,$$

где Z имеет отрицательное гамма-распределение с параметром формы $1/2$ и параметром масштаба $(2\sigma^2)^{-1}$, где $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2$.

Первая часть настоящей теоремы получена автором, вторая – аспирантом А.П. Жияновым под руководством автора.

Список литературы

- [1] Daley D. J. *Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 9(4), 1968, 315–322.
- [2] Ma S. *Bisexual Galton-Watson branching processes in random environments*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 22, 2006, 419–428.

О числе отображений с ограничениями на размеры компонент

А.Л. Якымив

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть \mathfrak{S}_n - совокупность отображений множества X из n элементов в себя. Граф отображения $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ является ориентированным графом $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y) , если $y = \sigma(x)$. Каждый граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из связных компонент, причём компонента состоит из одного контура и деревьев, корнями которых являются вершины контура, называемые циклическими элементами. Все дуги деревьев ориентированы в направлении к корням. Пусть $\mathfrak{S}_n(A)$ - совокупность отображений из \mathfrak{S}_n , размеры связных компонент которых принадлежат множеству $A \subseteq N$. При этом размером компонент называется число её вершин. Такие объекты рассмотрены А.Н. Тимашёвым в 2019 году [4]. Через $\pi(k)$ обозначим пуассоновскую случайную величину с параметром $k \in N$ и положим $q_k = \mathbb{P}\{\pi(k) < k\}$.

Теорема. *Пусть множество A имеет положительную плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е., $|k : k \in A, k \leq n|/n \rightarrow \varrho$ при $n \rightarrow \infty$. Также предположим, что $|k : k \leq n, k \in A, m - k \in A|/n \rightarrow \varrho^2$ для произвольной постоянной $C \in [1, \infty)$ равномерно по $m \in [n, Cn]$. Тогда*

$$|\mathfrak{S}_n(A)| = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varrho/2)} e^{c(A) - \varrho\gamma/2} n^{n-(1-\varrho)/2} L(n),$$

где γ - постоянная Эйлера, $c(A) = \sum_{k \in N \setminus A} (1/2 - q_k)/k$ и функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, причём $L(n) = \exp\left(\left(\sum_{k \in A, k \leq n} 1/k - \varrho \ln n\right)/2\right)$.

Пусть случайное отображение $\sigma_n = \sigma_n(A)$ имеет равномерное распределение на изучаемом множестве отображений $\mathfrak{S}_n(A)$. Через ζ_{in} обозначим число компонент размера i этого случайного отображения. Пусть $(\eta_i, i \in A)$ есть последовательность независимых пуассоновских случайных величин с параметрами $\lambda_i = q_i/i$. Через $d_{TV}(X, Y)$ обозначим расстояние по вариации между распределениями случайных векторов X и Y , принимающими значения из $Z_+^k = \{(x_1, \dots, x_k), x_i \in N \cup \{0\} \forall i = 1, \dots, k\}$, а именно:

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{B \subseteq Z_+^k} |\mathbb{P}\{X \in B\} - \mathbb{P}\{Y \in B\}|.$$

Далее используя результат Е. Манставичюса [1] для случайных ансамблей, а также теорему 1, выводим следующую оценку.

Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для некоторого $a > 0$ при $n \rightarrow \infty$*

$$d_{TV}((\zeta_{mn}, m \in A, m \leq r), (\xi_m, m \in A, m \leq r)) = O(1) \left(\frac{r}{n}\right)^a$$

равномерно по $r \in [1, n] \cap A$.

Пусть $\mathfrak{V}_n(A)$ есть множество отображений из \mathfrak{S}_n , размеры контуров которых принадлежат множеству A . Такие отображения принято называть A -отображениями. Они введены в 1972 году в работе В.Н. Сачкова [2]. Далее мы сравниваем, каких отображений больше (с учётом соответствующего утверждения из статьи [5].)

В завершение доклада отметим, что случайные отображения являются одним из многочисленных направлений в теории вероятностей и её применениях, в частности, в комбинаторном анализе, в которых работал Борис Александрович - см., например работу [3].

*Исследование выполнено за счет гранта Российской научного фонда №19-11-00111-П,
<https://rscf.ru/project/19-11-00111/>.*

Список литературы

- [1] Manstavičius E. *On total variation approximations for random assemblies*. In 23rd International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms: AofA'12, DMTCS Proc., 97–108.
- [2] Сачков В.Н. *Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту*. Теория вероятн. и ее примен., 17(4), 1972, 679–694.
- [3] Севастьянов Б.А. *Структурные характеристики некоторых неравномерных случайных отображений конечных множеств*. Тр. по дискр. матем., 6, Физматлит, М., 2002, 184–193.
- [4] Тимашёв А.Н. *Случайные отображения с объемами компонент из данного множества*. Теория вероятн. и ее примен., 64(3), 2019, 599–609.
- [5] Якымив А.Л. *О числе циклических точек случайного A -отображения*. Дискрет. матем., 25(3), 2013, 116–127.

Ветвящиеся случайные блуждания в некомпактных фазовых пространствах

Е. В. Яровая

Кафедра теории вероятностей, механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия

В статье Б.А.Севастьянова “Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами” (Теория вероятн. и ее примен., 3:2 (1958), 121–136), по-видимому, впервые рассмотрен ветвящийся случайный процесс с диффузией частиц. Такое обобщение значительно расширило область применения ветвящихся процессов и привело к возникновению такого направления, как ветвящиеся случайные блуждания.

В докладе приводится обзор различных моделей ветвящихся случайных блужданий с непрерывным временем, которые могут быть описаны в терминах размножения, гибели и транспорта частиц по многомерным решеткам. Точки решетки, в которых может происходить рождение и гибель частиц называются источниками ветвления. Перемещение частиц по решетке описывается, как правило, симметричным случайным блужданием. Мы предполагаем нарушение симметрии блуждания в конечном числе точек. Поведение моментов численностей частиц во многом определяется структурой спектра эволюционного оператора средних численностей частиц и требует для исследования ряда моделей привлечения спектральной теории операторов в банаевых пространствах. Для доказательства предельных теорем предлагаются два подхода: один из которых основан на проверке условий, гарантирующих единственность определения предельного вероятностного распределения численностей частиц своими моментами, а другой — на аппроксимации нормированного числа частиц в точке решетки некоторым неотрицательным мартингалом (см., Н. В. Смородина и Е. Б. Яровая, УМН, 77:5(467) (2022), 193–194), позволяющий доказать сходимость этих величин к пределу в среднеквадратическом в достаточно общих предположениях на характеристики процесса. Особое внимание уделяется сравнению асимптотического поведения численностей частиц в каждой точке решетки и их моментов для ветвящихся случайных блужданий при различных соотношениях между параметрами модели.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00375, <https://rscf.ru/project/23-11-00375> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.