Асимптотика вероятности невырождения почти критических ветвящихся процессов в случайной среде

В.В. Харламов

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

Рассмотрим два семейства производящих функций

$$\{f_y, y \in Y\}, \quad \{f_{y,i,n}, y \in Y, 0 \le i < n\},$$

где $(Y, \mathcal{G})$ – измеримое пространство. Последовательность $\Xi = \{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ независимых и одинаково распределённых случайных элементов со значениями в $(Y, \mathcal{G})$ будем называть *случайной средой*.

1. Положим $F_{k-1} := f_{\xi_k}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$.
2. Разыграем независимые случайные величины (с.в.) $Y_{i,k}$ с п.ф. F_{k-1}, $i, k \in \mathbb{N}$.
3. Положим $Z_0 = 1$, $Z_k := \sum_{i=1}^{Z_{k-1}} Y_{i,k}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\mathcal{Z} = \{Z_k, k \ge 0\}$ будем называть *ветвящимся процессом в случайной среде* (ВПСС).

Положим

$$X_i := \log F'_{i-1}(1), \quad S_0 := 0, \quad S_k := X_1 + \ldots + X_k, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_k, k \ge 0\}$ будем называть *сопровождающим случайным блужданием* (ССБ) для ВПСС $\mathcal{Z}$.

Условие 1.

$$\mathsf{E}X_1 = 0, \quad \mathsf{D}X_1 \in (0, \infty).$$

Если условие 1 выполнено, то ВПСС $\mathcal{Z}$ будем называть *критическим*. Козлов М. В. в работе [1] получил асимптотическое поведение $\mathsf{P}(Z_n > 0)$ для критического ВПСС с дробно-линейной производящей функцией. Общий случай был рассмотрен Geiger J., Kersting G. в работе [2].

В настоящей работе мы изучаем переходные явления для вероятности невырождения ВПСС. Переходные явления для ветвящихся процессов без среды были изучены в непрерывном случае Севастьяновым Б. А. в работе [3], в дискретном случае Нагаевым С. В. и Мухамеджановой Н. В. в работе [4]. Для ВПСС Дьяконовой Е. Е. в работе [5] исследовались переходные явления в случае процессов с миграцией и иммиграцией.

Мы будем использовать существенно другую модель для исследования переходных явлений.

1. Положим $F_{k-1,n} := f_{\xi_k,k-1,n}$ при всех натуральных $k \le n$.
2. Разыграем независимые с.в. $Y_{i,k,n}$ с п.ф. $F_{k-1,n}$ при всех натуральных i и $k \le n$.

3. При каждом натуральном n определим набор $\{Z_{k,n}, k \le n\}$. Положим $Z_{0,n} = 1$, $Z_{k,n} := \sum_{i=1}^{Z_{k-1,n}} Y_{i,k,n}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Набор с.в. $\{Z_{k,n}, 0 \le k \le n, Z_{0,n} = 1\}$ назовём *возмущённым ветвящимся процессом в случайной среде* Ξ (ВВПСС).

Условие 2. Введём обозначение

$$Q_n(C,\delta) := \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{k} a_{i,n} \right| \le C k^{1/2-\delta} \right\}, \quad a_{i,n} := \log F'_{i-1,n}(1) - \log F'_{i-1}(1).$$

При некоторых $\delta \in (0, 1/2)$, $C > 0$

$$\sqrt{n}\left(1 - \mathsf{P}\left(Q_n(C,\delta)\right)\right) \to 0, \ n \to \infty.$$

Из условия 1 следует, что разность между ССБ для $Z_{k,n}$ и Z_k ограничена с вероятностью, близкой к 1.

Основной результат этой работы состоит в следующем утверждении.

Теорема. *При выполнении условий 1 и 2 и некоторых технических предположений справедлива эквивалентность*

$$\mathsf{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \mathsf{P}(Z_n > 0) \sim \Upsilon \frac{e^{-c_-}}{\sqrt{\pi n}}, \ n \to \infty,$$

где Υ и c_- – положительные константы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Благодарности Автор глубоко признателен Шкляеву А. В. за постоянную поддержку работы.

Список литературы

[1] Козлов М. В. *Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде.* Теория вероятностей и ее применения, 21(4), 1976, 813–825.

[2] Geiger J., Kersting G. *The survival probability of a critical branching process in a random environment.* Theory of Probability & Its Applications, 45(3), 2001, 517–525.

[3] Севастьянов Б. А. *Переходные явления в ветвящихся случайных процессах.* Теория вероятностей и ее применения, 4(2), 1959, 121–135.

[4] Нагаев С. В., Мухамеджанова Н. В. *Переходные явления в ветвящихся процессах с дискретным временем.* Сб. Предельные теоремы и статистические выводы, 1966, 83–89.

[5] Dyakonova E. *Transition phenomena for branching processes in a random environment.* Journal of Mathematical Sciences, 78, 1996, 48–53.