Критические ветвящиеся процессы в неблагоприятной случайной среде

В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

К.Донг

Ксиданский университет, Сиань, Китай

Пусть $\mathcal{Z} = \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим $F_n = \{F_n\{1\}, F_n\{2\}, ...\}$ распределение числа потомков у частиц $(n-1)$-го поколения. Пусть $F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_n\{k\} s^k$. Последовательность

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + ... + X_n, \quad n \geq 1,$$

где $X_i = \log F_i'(1), i = 1, 2, ...,$ называется сопровождающим случайным блужданием для процесса $\mathcal{Z}$. Пусть

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1;\ |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2;\ |\beta| < 1\}$$

— подмножество в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для пары $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X мы будем писать $X \in \mathcal{H}(\alpha, \beta)$, если распределение величины X принадлежит (без центрирования) области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G(w) = \exp\left\{-c|w|^{\alpha}\left(1 - i\beta\frac{w}{|w|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\},\ c > 0.$$

Наложим следующие условия.

Условие B1. Приращения $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ сопровождающего случайного блуждания независимы, одинаково распределены и принадлежат $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$. Более того, распределение случайной величины X_1 абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на множестве $\mathbb{R}$, причем существует натуральное число n такое, что плотность распределения случайной величины S_n ограничена.

Напомним, что ВПСС $\mathcal{Z}$ называется критическим, если $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п. н. и $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п. н. Заметим, что если выполнено условие B1, то процесс является критическим и существует такая последовательность положительных чисел a_n, что распределение случайной величины S_n/a_n слабо сходится к распределению случайной величины с характеристической функцией $G(w)$.

Пусть

$$\gamma(b) = \frac{\sum_{k=b}^{\infty} k^2 F(\{k\})}{\left(\sum_{i=b}^{\infty} iF(\{i\})\right)^2}.$$

Условие B2. Существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbb{E}\log^{\alpha+\varepsilon}(\max(1, \gamma(b)) \ < \ \infty.$$

Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема. *Пусть выполнены условия B1 и B2,* $\min(m,n) \to \infty$ *и* $m = o(n)$. *Тогда*

1) если $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *таким образом, что* $\varphi(n) = o(a_m)$, *то для любого* $z \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\log Z_{n-m} \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0\right) = A_1(z);$$

2) если $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *таким образом, что* $\varphi(n) \sim Ta_m, T \in (0,\infty)$, *то для любого* $z \in [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\log Z_{n-m} \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0\right) = B(z,T);$$

3) если $m = o(\varphi(n)), \varphi(n) = o(a_n)$, *то для любого* $z \in [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{a_m}\left(\log Z_{n-m} - S_n\right) \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z_n > 0\right) = A_2(z),$$

где $A_1(z), A_2(z)$ *и* $B(z,T)$ *– различные собственные функции распределения.*

Исследование В. А. Ватутина и Е. Е. Дьяконовой выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение N 075-15-2022-265).

Работа В. А. Ватутина и К. Донга была также поддержана Министерством Науки и Технологии КНР (грант G2022174007L).

Список литературы

[1] Ватутин В.А., Донг К., Дьяконова Е.Е., Случайные блуждания, остающиеся неотрицательными, и ветвящиеся процессы в неблагоприятной среде, Матем. сб., 214(11), 2023 (в печати).