Время вырождения ветвящихся процессов с частицами двух полов с большим начальным число пар

А.В. Шкляев

Кафедра теории случайных процессов и статистики, механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный D. Daley в [1]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом* (ДВП). Пусть $f(t,s)$ – двумерная производящая функция, $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВП $\mathcal{N} = (N_n,\ n \geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}\left(N_{n+1} = j | \, N_n = i\right) = \mathbf{P}(L(U,V) = j),$$

где вектор (U,V) имеет п.ф. $f(s,t)^i$, $s,t \in [0,1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0 = N$.

Дадим более понятную физическую интерпретацию процесса. Пусть $(X_{n,i}, Y_{n,i})$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}$, – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы. Построим процесс следующим образом. Изначально в нем есть N пар, j-я из которых дает $(X_{1,j}, Y_{1,j})$ потомков первого и второго пола. Из полученных x частиц первого пола и y частиц второго пола образуется $L(x,y)$ пар, которые, в свою очередь, вновь дают потомков по тому же закону и так далее. Отметим, что одна из наиболее естественных функций L имеет вид $L(x,y) = \min(x,y)$, соответствующий ДВП мы будем называть *ДВП с идеальной верностью.*

Будем называть ДВП с идеальной верностью *докритическим*, если $A = \min(\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y) < 1$, *критическим*, если $A = 1$ и *надкритическим*, если $A > 1$. Отдельно выделим дважды критический случай, когда $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1$.

Теорема. *Пусть $\{N_n\}$ – ДВП с идеальной верностью с $N_0 = N$, T_N – время до вырождения процесса.*

1. *Пусть процесс докритический, $\mathbf{E}X^{1+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{1+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда*

$$T_N - \ln N = O_P(1),\ N \to \infty,$$

то есть

$$\limsup_{x\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbf{P}(|T_N - \ln N| > x) = 0.$$

2. *Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{2+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{2+\delta} < +\infty$ при некотором $\delta > 0$. Тогда*

$$\frac{T_N}{N} \xrightarrow{P} \frac{2}{\mu},\ N \to \infty, \quad \mu = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho}}{\sqrt{2\pi}},$$

где σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии X и Y соответственно, а $\rho = cov(X,Y)$.

3. Пусть процесс дважды критический, $\mathbf{E}X^{5/2+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y^{5/2+\delta} < +\infty$ *при некотором* $\delta > 0$. *Тогда*

$$\frac{T_N - 2N/\mu}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}^2),\ N \to \infty, \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\pi\mu^3}((\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\pi-1)+2\rho).$$

Первый результат теоремы принадлежит студенту МГУ М.Р. Абдюшеву, второй – студентке МГУ А.Ю. Маркиной (оба получены под руководством автора), а третий – автору.

Аналогичные результаты можно получить и для процесса в случайной среде. Рассмотрим ветвящийся процесс с частицами двух полов, введенный S. Ma в [2]. Для краткости будем называть его *двуполым ветвящимся процессом в случайной среде* (ДВПСС).

Пусть $f(t, s; y)$ – двумерная производящая функция (по первым двум переменным) с параметром y, $L : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ – заданная функция, которую будем называть функцией паросочетаний. ДВПСС $\mathcal{N} = (N_n,\ n \geq 0)$ определяется как однородная марковская цепь с переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}\,(\,N_{n+1} = j|\,N_n = i, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{P}(L(U, V, \eta_{n+1}) = j|\boldsymbol{\eta}),$$

где вектор (U, V) при условии $\boldsymbol{\eta}$ имеет п.ф. $f(s, t; \eta_{n+1})^i$, $s, t \in [0, 1]$. При этом мы предполагаем, что $N_0 = N$.

Опять же естественная интерпретация предлагает рассматривать $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ – количества потомков одной пары первого и второго пола и полагать

$$N_{n+1} = L\left(\sum_{i=1}^{N_n} X_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} Y_{n+1,i}, \eta_{n+1}\right).$$

Случайные векторы $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ при фиксации среды предполагаются независимыми и имеющими распределение $f(s, t; \eta_n)$.

Назовем функцию паросочетаний $L(x, y; z)$ *почти липшицевой*, если найдется липшицева функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, обладающая свойством $g(x, cy, z) = cg(x, y, z)$, для которой при всех x, y, z

$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leq c(|x|^{1-\delta} + |y|^{1-\delta})$$

при некоторых положительных c и $\delta \in (0, 1)$.

Рассмотрим ДВПСС $\{N_n\}$ с почти липшицевой функцией паросочетаний L. Введем случайные величины

$$\xi_i = \ln g(\mathbf{E}_{\eta_i} X_{i,1}, \mathbf{E}Y_{i,1}, \eta_i)$$

и назовем $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \geq 0$, *случайным блужданием, сопровождающим ДВПСС* $\{N_n\}$. Будем называть процесс *докритическим* при $\mathbf{E}\xi_1 < 0$, *критическим* при $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и *надкритическим* при $\mathbf{E}\xi_1 > 0$.

Теорема. *Пусть* $\{N_n\}$ *– ДВПСС с* $N_0 = N$, T_N *– время до вырождения процесса.*

1. *Пусть ДВПСС докритический, причем* $\mathbf{E}X_{1,1}^{1+\delta} < +\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^{1+\delta} < +\infty$ *при некотором положительном* δ. *Тогда*

$$T_N - \ln N \mathbf{E}\xi_1 = O_P(1), \; N \to \infty.$$

2. *Пусть ДВПСС критический, причем* $\mathbf{E}X_{1,1}^2 < +\infty$, $\mathbf{E}Y_{1,1}^2 < +\infty$. *Тогда*

$$\frac{T_N}{\ln^2 N} \xrightarrow{d} Z, \; N \to \infty,$$

   где Z *имеет отрицательное гамма-распределение с параметром формы* $1/2$ *и параметром масштаба* $(2\sigma^2)^{-1}$, *где* $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2$.

Первая часть настоящей теоремы получена автором, вторая – аспирантом А.П. Жияновым под руководством автора.

Список литературы

[1] Daley D. J. *Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 9(4), 1968, 315–322.

[2] Ma S. *Bisexual Galton-Watson branching processes in random environments.* Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 22, 2006, 419–428.