

**Асимптотическая форма ветвящегося случайного блуждания на
периодических графах**

Е. Вл. Булинская

Кафедра математической статистики и случайных процессов,
механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва,
Россия

Среди различных моделей ветвящихся случайных блужданий (ВСБ), получивших широкое распространение в последние годы (см., например, [5], [8], [13] и [17], особое место занимают каталитические ВСБ или ВСБ в неоднородной среде. Их особенностью является наличие особых точек в пространстве, только находясь в которых, частицы, совершающие случайное блуждание, могут также производить потомков или гибнуть. Говорят, что эти точки содержат “катализаторы”, их также называют источниками размножения и гибели частиц или источниками ветвления. В первых работах на эту тему, среди которых отметим [1] и [4], рассматривался единственный источник ветвления. Далее, например, в статьях [14] и [16], предполагалось, что имеется конечное число произвольно расположенных источников в \mathbb{Z}^d . В работах [2] и [3] авторы рассмотрели ВСБ с множеством Γ источников ветвления, имеющим периодическую структуру, и назвали его ВСБ на периодических графах. Интересно, что при изучении каталитических ВСБ менялись не только модели, но и постановки задач. Так, важную роль играли классификация на надкритические, критические и докритические ВСБ, анализ асимптотического по времени поведения общих и локальных численностей частиц, а позднее задачи выявления предельной формы случайного облака частиц, распространяющегося в пространстве с течением времени.

Данный доклад посвящен исследованию эволюции пространственного распространения популяции частиц в ВСБ на периодических графах. Предполагается, что режим ветвления надкритический, а случайное блуждание имеет “легкие” хвосты. Нами установлено, что в метрике Хаусдорфа нормированное множителем t^{-1} случайное облако частиц, существующих в рассматриваемом ВСБ в момент времени t , сходится для почти всех точек события невырождения популяции к множеству $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, называемому асимптотической формой популяции ВСБ, когда $t \rightarrow \infty$. Также найдена явная формула, описывающая предельное множество \mathcal{P} . Если все источники ветвления имеют одни и те же параметры и расположены периодически на \mathbb{Z}^d , то описание \mathcal{P} вовлекает экспоненциальные моменты времени и места первого достижения (или первого возвращения) случайным блужданием множества Γ . Если же рассматривается более общая ситуация, когда источники ветвления имеют различные характеристики (например, в одном источнике частицы только дают потомков, а в другом – только гибнут) и расположены периодически, то \mathcal{P} выражается с помощью вспомогательных множеств, порожденных определенными функциями от перроновых корней некоторых семейств неотрицательных матриц, построенных на основе средних численностей потомков в разных источниках и некоторых ха-

рактеристик инфинитезимального оператора случайного блуждания. Мы рассматриваем несколько примеров и демонстрируем способы нахождения соответствующих множеств \mathcal{P} .

Основная идея доказательств наших результатов состоит в рассмотрении ВСБ на периодических графах в рамках многотипного общего ВСБ, изученного, например, в работах [6] и [7]. Кроме того, применяется аппарат преобразования Лапласа, введение вспомогательного многотипного марковского ветвящегося процесса, теория неразложимых неотрицательных и квазинеотрицательных матриц (в частности, теорема Перрона-Фробениуса).

Выполненное исследование дополняет результаты о пространственном распространении ВСБ с конечным числом источников ветвления, полученные, например, в [9]–[11], [12], [15] и [16].

Список литературы

- [1] Ватутин В.А., Топчий В.А., Ху Ю. *Ветвящееся случайное блуждание по решетке \mathbb{Z}^4 с ветвлением лишь в начале координат*. Теория вероятн. примен., 56(2), 2011, 224–247.
- [2] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке \mathbb{Z}^d с периодическими источниками ветвлений*. Зап. научн. сем. ПОМИ, 466, 2017, 234–256.
- [3] Платонова М.В., Рядовкин К.С. *Ветвящиеся случайные блуждания на \mathbb{Z}^d с периодически расположеными источниками ветвлений*. Теория вероятн. примен., 64(2), 2019, 283–307.
- [4] Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B. *Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 326, 1998, 975–980.
- [5] Bai T., Rousselin P. *Branching random walks conditioned on particle numbers*. J. Stat. Phys., 185(3), 2021, 1–15.
- [6] Biggins J.D. *The Asymptotic Shape of the Branching Random Walk*. Adv. Appl. Probab., 10(1), 1978, 62–84.
- [7] Biggins J.D. *How fast does a general branching random walk spread?* In: Athreya, K.B., Jagers, P. (Eds), Classical and Modern Branching Processes. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 84, 19–39. Springer, New York, 1997.
- [8] Brunet E., Le A.D., Mueller A.H., Munier S. *How to generate the tip of branching random walks evolved to large times*. EPL, 131(4), 2020, 40002.
- [9] Bulinskaya E.Vl. *Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice*. Stoch. Process. Appl., 128(7), 2018, 2325–2340.
- [10] Bulinskaya E.Vl. *Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails*. J. Theor. Probab., 34(1), 2021, 141–161.
- [11] Bulinskaya E.Vl. *Catalytic branching random walk with semi-exponential increments*. Math. Popul. Stud., 28(3), 2021, 123–153.
- [12] Carmona Ph., Hu Y. *The spread of a catalytic branching random walk*. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 50(2), 2014, 327–351.

- [13] Chernoussova E., Hryniv O., Molchanov S. *Branching random walk in a random time-independent environment*. Math. Popul. Stud., 30(2), 2023, 73–94.
- [14] Doering L., Roberts M. *Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory*. In: Donati-Martin C., Lejay A., Rouault A. (Eds.), Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Mathematics, 2078, 2013, 305–322.
- [15] Liu R. *The Spread Speed of Multiple Catalytic Branching Random Walks*. Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser., 39(2), 2023, 262–292.
- [16] Молчанов С.А., Яровая Е.Б. *Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным числом центров генерации частиц*. ДАН, 446(3), 2012, 259–262.
- [17] Shi Z. *Branching random walks*. École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XLII – 2012, Lect. Notes Math., 2151, 2015.