О положительной возвратности процесса рождения и гибели и системы $M/GI/1$

А.Ю.Веретенников

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Москва, Россия

В знаменитой работе [1] о телефонной станции с конечным числом серверов Б.А.Севастьянов доказал факт сходимости по метрике полной вариации распределения соответствующего процесса к стационарному. Само это распределение без доказательства указано в публикации R. Fortet. Единственным условием в [1] была конечность $\mu^{-1} := \int_0^\infty x dF(x)$ для времени обслуживания с ф.р. F. Позже возникли обобщения этой работы на бесконечные системы, где предполагалось еще, нестрого говоря, $\mu > \lambda$, где λ – интенсивность входящего пуассоновского потока требований. Затем появились работы с оценками на скорость сходимости, методика которых была сперва опробована на системах типа $M_n/GI/1/\infty$ [3] и др.; в них предполагалось существование *интенсивности обслуживания*. В данной работе для процесса рождения и гибели (РГ) изучена *положительная возвратность*, влекущая скорость сходимости порядка $1/t$ к стационарному распределению, с приложением к системе $M_n/GI/1/\infty$ (без использования существования интенсивности обслуживания), где интенсивность входящего потока λ_n может зависеть от числа n заявок в очереди. Оценку скорости сходимости порядка $1/t$ тут можно получить и иначе, методами теории восстановления; это не эквивалентно положительной возвратности и использует иные условия. Соотношение между двумя подходами требует дополнительных исследований. Для (неотрицательного) процесса РГ, обозначаемого через X_n, предполагаем, что найдутся $\delta, r_i > 0$ такие, что (индекс i в E_i означает начальное условие (н.у.))

$$\Delta_i^2 := \sup_{i>N} \sum_{j=0}^{\infty} (j-i)^2 p_{i,j} \le 2r_i - \delta, \quad \& \quad b_i := \sum_{j=0}^{\infty} (j-i) p_{i,j} \le -\frac{r_i}{i}, \quad \forall\, i > 0. \tag{1}$$

Теорема. *При условии (1) для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка*

$$\mathsf{E}_i \tau_0^X \le \delta^{-1} i^2, \quad \text{где } \tau_0^X := \inf(n \ge 0 \colon X_n = 0).$$

Перейдем к системе $M_n/GI/1/\infty$. Входящий поток – условно пуассоновский с интенсивностью λ_n, все обслуживания независимы; если сервер занят, то заявка становится в очередь, ограничений на которую нет; дисциплина обслуживания FIFO. Процесс $Y_t = (n_t, y_t)$ описывается переменными n_t – числом требований в очереди – и y_t – перескоком в терминологии ТМО; при $n = 0$ считаем $y := 0$. Предполагаем $0 < C^{-1} \le \lambda_n \le C < \infty$, $\forall\, n$. Применен известный метод – рассматривать процесс Y_t в моменты (T_k) окончаний очередных обслуживаний. Эта вложенная цепь Маркова $X_k = n_{T_k}$ является процессом РГ, переходные вероятности p_{ij} которого выписываются в терминах преобразований Лапласа ф.р. F; имеем $p_{i,j} = 0, j < i - 1$. Такой подход к исследованию *стационарного распределения* систем $M_n/GI/1$

при условии его существования (напомним, что существование последнего положительная возвратность обеспечивает) реализован в [2] и др.; рекуррентные свойства в [2] не изучались. Есть надежда, что методы данной работы удастся применить и к системам типа Эрланга – Севастьянова.

Теорема. *Пусть для вложенной цепи X_n в системе $M_n/GI/1/\infty$ выполнено условие (1). Тогда для момента остановки $\tau_0^Y := \inf(t \ge 0 : n(Y_t) = 0)$ найдется такое $K > 0$, что $\forall$ н.у. $(n, 0)$,*

$$\mathsf{E}_{n,0}\tau_0^Y \le Kn^2.$$

Теорема. *Пусть для системы $M_n/GI/1/\infty$ найдется $r > 2+2\sup_n \lambda_n$ такое, что для "интегральной интенсивности" $H(t) := \int_0^t (1-F(s))^{-1}dF(s) < \infty$, $\forall\, t$,*

$$\forall\, 0 \le t \le 1, \int_0^t (1+s)dH(s) \ge rt, \;\; \& \;\; \forall \frac{1}{2} \le \Delta \le 1, \; \inf_{x\ge 1}\int_0^\Delta (1+x+s)dH(x+s) \ge r\Delta.$$

Тогда $\forall 0 \le x \le 1/2$ $\exists a > 0$ такое, что $\inf_{0\le x'\le x} F(x'+a) - F(x') > 0$, и, более того, $\exists K > 0$ такое, что $\forall$н.у. (n, y) с $y \ge 0$ (sic: в правой части нет квадрата),

$$\mathsf{E}_{n,y}\tau_0^Y \le K(n+y+1).$$

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики "Базис".

Список литературы

[1] Севастьянов Б.А. *Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами.* ТВП, 2(1), 1957, 106–116.

[2] Abouee-Mehrizi H., Baron O. *State-dependent M/G/1 queueing systems.* Queueing Syst., 82, 2016, 121–148.

[3] Veretennikov A.Yu., Zverkina G.A. *Simple proof of Dynkin's formula for single-server systems and polynomial convergence rates.* MPRF, 20, 2014, 479–504.