О числе отображений с ограничениями на размеры компонент

А.Л. Якымив

Математический институт им. В.А.Стеклова, Москва, Россия

Пусть $\mathfrak{S}_n$ - совокупность отображений множества X из n элементов в себя. Граф отображения $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ является ориентированным графом $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого $x, y \in X$ соединены дугой (x, y), если $y = \sigma(x)$. Каждый граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из связных компонент, причём компонента состоит из одного контура и деревьев, корнями которых являются вершины контура, называемые циклическими элементами. Все дуги деревьев ориентированы в направлении к корням. Пусть $\mathfrak{S}_n(A)$ - совокупность отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры связных компонент которых принадлежат множеству $A \subseteq N$. При этом размером компоненты называется число её вершин. Такие объекты рассмотрены А.Н. Тимашёвым в 2019 году [4]. Через $\pi(k)$ обозначим пуассоновскую случайную величину с параметром $k \in N$ и положим $q_k = \mathsf{P}\{\pi(k) < k\}$.

Теорема. *Пусть множество A имеет положительную плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е., $|k: \ k \in A, k \le n|/n \to \varrho$ при $n \to \infty$. Также предположим, что $|k : k \le n, k \in A, m - k \in A|/n \to \varrho^2$ для произвольной постоянной $C \in [1, \infty)$ равномерно по $m \in [n, Cn]$. Тогда*

$$|\mathfrak{S}_n(A)| = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varrho/2)} e^{c(A) - \varrho\gamma/2} n^{n-(1-\varrho)/2} L(n),$$

где γ - постоянная Эйлера, $c(A) = \sum_{k \in N \setminus A} (1/2 - q_k)/k$ и функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности, причём $L(n) = \exp\left(\left(\sum_{k\in A,\ k\le n} 1/k - \varrho \ln n\right)/2\right)$.

Пусть случайное отображение $\sigma_n = \sigma_n(A)$ имеет равномерное распределение на изучаемом множестве отображений $\mathfrak{S}_n(A)$. Через ζ_{in} обозначим число компонент размера i этого случайного отображения. Пусть $(\eta_i,\ i \in A)$ есть последовательность независимых пуассоновских случайных величин с параметрами $\lambda_i = q_i/i$. Через $d_{TV}(X, Y)$ обозначим расстояние по вариации между распределениями случайных векторов X и Y, принимающими значения из $Z_+^k = \{(x_1, \ldots, x_k),\ x_i \in N \cup \{0\}\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$, а именно:

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{B \subseteq Z_+^k} |\mathsf{P}\{X \in B\} - \mathsf{P}\{Y \in B\}|.$$

Далее используя результат Е. Манставичюса [1] для случайных ансамблей, а также теорему 1, выводим следующую оценку.

Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда для некоторого $a > 0$ при $n \to \infty$*

$$d_{TV}((\zeta_{mn},\ m \in A, m \le r), (\xi_m, m \in A, m \le r)) = O(1) \left(\frac{r}{n}\right)^a$$

равномерно по $r \in [1, n] \cap A$.

Пусть $\mathfrak{V}_n(A)$ есть множество отображений из $\mathfrak{S}_n$, размеры контуров которых принадлежат множеству A. Такие отображения принято называть A-отбражениями. Они введены в 1972 году в работе В.Н. Сачкова [2]. Далее мы сравниваем, каких отображений больше (с учётом соответствующего утверждения из статьи [5].)

В завершение доклада отметим, что случайные отображения являются одним из многочисленных направлений в теории вероятностей и её применениях, в частности, в комбинаторном анализе, в которых работал Борис Александрович - см., например работу [3].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П,
https://rscf.ru/project/19-11-00111/ .*

Список литературы

[1] Manstavićius E. *On total variation approximations for random assemblies.* In 23rd International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms: AofA'12, DMTCS Proc., 97-–108.

[2] Сачков В.Н. *Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту.* Теория вероятн. и ее примен., 17(4), 1972, 679—694.

[3] Севастьянов Б.А. *Структурные характеристики некоторых неравномерных случайных отображений конечных множеств.* Тр. по дискр. матем., 6, Физматлит, М., 2002, 184—193.

[4] Тимашёв А.Н. *Случайные отображения с объемами компонент из заданного множества.* Теория вероятн. и ее примен., 64(3), 2019, 599—609.

[5] Якымив А.Л. *О числе циклических точек случайного A-отображения.* Дискрет. матем., 25(3), 2013, 116-–127.