

О графах Грюнберга–Кегеля конечных групп и характеристизации конечной группы ее графом Грюнберга–Кегеля

Наталья Владимировна Маслова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральский федеральный университет
Уральский математический центр
(Екатеринбург, Россия)
butterson@mail.ru

II Всероссийская научно-практическая конференция
”Математика в современном мире”,
посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося
русского математика Д. А. Граве

19–23 сентября 2023 г.

Термин "группа" используется в значении "конечная группа".

Термин "граф" используется в значении "обыкновенный граф" (т. е. неориентированный граф без петель и кратных ребер).

Клика (соответственно, коклика) на n вершинах называется n -кликой (соответственно, n -кокликой).

Объект = любой объект, вне зависимости от его природы.

Примеры объектов:

- граф;
- кристалл;
- динамическая система;
- сеть;
- ...

О классификации конечных простых групп

Группа G **проста**, если она не содержит собственных нормальных подгрупп, **почти проста** с цоклом S , если

$$S \cong \operatorname{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \operatorname{Aut}(S),$$

где S — неабелева простая группа.

Классификация конечных простых групп (ККПГ) была анонсирована в 1980. В соответствии с этой классификацией, неабелевы простые группы содержатся в следующем списке:

Знакопеременные группы: A_n для $n \geq 5$;

Классические группы: $PSL_n(q) = A_{n-1}(q)$,
 $PSU_n(q) = {}^2A_{n-1}(q)$, $PSp_{2n}(q) = C_n(q)$, $P\Omega_{2n+1}(q) = B_n(q)$,
 $P\Omega_{2n}^+(q) = D_n(q)$, $P\Omega_{2n}^-(q) = {}^2D_n(q)$;

Исключительные группы лиева типа: $E_8(q)$, $E_7(q)$, $E_6(q)$,
 ${}^2E_6(q)$, ${}^3D_{2n}(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)'$ (q — степень числа 2), $G_2(q)$,
 ${}^2G_2(q)$ (q — степень числа 3), ${}^2B_2(q)$ (q — степень числа 2);

26 **спорадических** групп.

Как можно исследовать действия групп на объектах?

Любая группа может быть представлена как группа подстановок (**теорема Кэли**).

Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$.

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$, где Ω_i — i -я орбита группы G , т. е. G транзитивна на каждой Ω_i и $G \leq \prod_{i=1}^k \text{Sym}(\Omega_i)$.

Задача. Определить G .

Можно предполагать, что G **транзитивна** на Ω (т. е. Ω — орбита группы G).

Если G импримитивна на Ω , то выберем максимальную по включению систему импримитивности Δ . Тогда группа G действует примитивно на множестве блоков Δ .

Можно предполагать, что G **примитивна** на Ω (т. е. Δ состоит из единственного блока Ω).

Как можно исследовать действия групп на объектах?

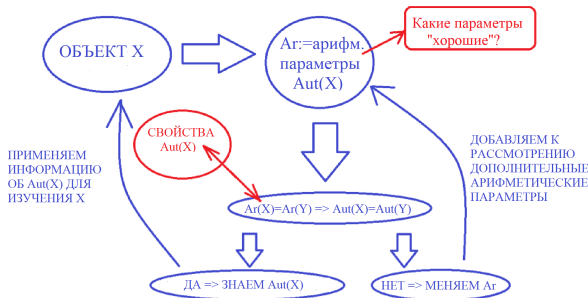
Теорема О'Нэна – Скотта для примитивных групп подстановок (M. Liebeck, Ch. E. Praeger, J. Saxl, 1988).

Каждая примитивная группа подстановок почти проста или подстановочно эквивалентна группе подстановок одного из следующих типов:

- (HA) (голоморф абелевой группы);
- (HS) (голоморф простой группы);
- (HC) (голоморф составной группы);
- (TW) (скрещённое сплетение);
- (SD) (простая диагональная);
- (CD) (составная диагональная);
- (PA) (действие на произведения).

Замечание. Если G — группа одного из типов (HA) , (HS) , (HC) , (TW) , (SD) , (CD) , (PA) , то мы знаем особенности действия G на Ω ; если G почти проста, то не известно ничего, кроме теоретико-группового строения G .

Постановка проблемы



Основной вопрос. Какие параметры группы являются "хорошими"?

Определения

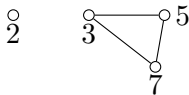
Пусть Ω — конечное множество, состоящее из целых положительных чисел.

Через $\pi(\Omega)$ обозначим множество всех простых делителей чисел из Ω .

Пример. Если $\Omega = \{2, 15, 21, 35\}$, то $\pi(\Omega) = \{2, 3, 5, 7\}$.

Граф $\Gamma(\Omega)$, вершинами которого являются числа из $\pi(\Omega)$ и в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда pq делит некоторый элемент из Ω , называется **графом простых чисел** множества Ω .

Пример. Если $\Omega = \{2, 15, 21, 35\}$, то $\Gamma(\Omega)$ имеет следующий вид:



Пусть G — группа.

Спектр $\omega(G)$ — это множество всех порядков элементов из G .

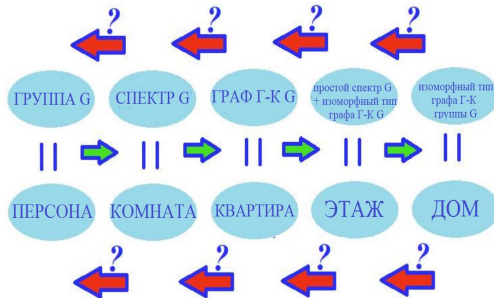
Простой спектр $\pi(G)$ — множество всех простых чисел из $\omega(G)$ (эквивалентно, множество всех простых делителей $|G|$).

Граф $\Gamma(G)$ со множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$, называется **графом Грюнберга–Кегеля** (коротко: **графом Г.-К.**) или **графом простых чисел** группы G .

Очевидно, что $\Gamma(G) = \Gamma(\omega(G))$.

Упражнение. Пусть G — группа, p и q — различные простые числа из $\pi(G)$. Тогда $pq \in \omega(G)$, если и только если существуют элементы $x, y \in G$ такие, что $|x| = p$, $|y| = q$ и $xy = yx$.

”Адресная книга” конечных групп



Проблема. Пусть G — конечная группа. В каких случаях G (однозначно) определена своими арифметическими параметрами?

Примеры

Пример 1. Неизоморфные группы, имеющие равные спектры (разные "персоны", "живущие" в одной "комнате"):

$$\omega(S_5) = \omega(S_6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Пример 2. Группы, имеющие разные спектры, но равные графы Грюнберга–Кегеля ("персоны", "живущие" в разных "комнатах", но в одной "квартире"):

$$\omega(A_5) = \{1, 2, 3, 5\};$$

$$\omega(A_6) = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

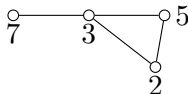
$$\Gamma(A_5) = \Gamma(A_6):$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ 2 & 3 & 5 \end{array}$$

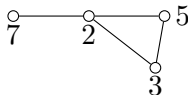
Более того, если $\omega(G) = \omega(A_5)$, то $G \cong A_5$ (W. Shi, 1985).

Пример 3. Группы, имеющие равные простые спектры, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны, но не равны ("персоны", "живущие" в разных "квартирах", но на одном "этаже"):

$\Gamma(A_{10})$:



$\Gamma(\text{Aut}(J_2))$:



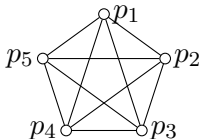
Пример 4. Группы, имеющие различные простые спектры, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны (“персоны”, “живущие” на разных “этажах”, но в одном “доме”):

Пусть $n = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, где p_i — попарно различные простые числа, и $G = C_n$ — циклическая группа порядка n .

$$\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}.$$

G абелева $\Rightarrow p_i p_j \in \omega(G)$ для любых i и j .

$\Gamma(G)$:



Будем говорить, что группа G

- **распознаваема** по спектру (по графу Г.–К.), если для любой группы H равенство $\omega(G) = \omega(H)$ ($\Gamma(G) = \Gamma(H)$, соответственно) выполняется тогда и только тогда, когда $G \cong H$;
- **k -распознаваема** по спектру (по графу Г.–К.), где k — целое положительное число, если существует в точности k попарно неизоморфных групп с тем же спектром (графом Г.–К., соответственно), что и G ;
- **почти распознаваема** по спектру (графу Г.–К.), если она k -распознаваема по спектру (графу Г.–К., соответственно) для некоторого целого положительного числа k ;
- **нераспознаваемой** по спектру (графу Г.–К.), если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп с тем же спектром (графом Г.–К., соответственно), что и G .

Теорема (В. Д. Мазуров, W. Shi, 2012). Пусть G — конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\omega(G) = \omega(H)$;
- (2) существует конечная группа H с нетривиальным разрешимым радикалом такая, что $\omega(G) = \omega(H)$.

Распознаваемость по спектру

Теорема (Много авторов, в процессе...). Пусть L — одна из следующих неабелевых простых групп:

- (i) спорадическая группа, отличная от группы J_2 ;
- (ii) знакопеременная группы A_n , где $n \notin \{6, 10\}$;
- (iii) исключительная группа лиева типа, отличная от ${}^3D_4(2)$;
- (iv) классическая группа достаточно большой размерности.

Тогда если G — группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$, то, с точностью до изоморфизма, $L \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(L)$. В частности, "почти все" неабелевы простые группы почти распознаваемы по спектру.

Теорема (Много авторов; финальный результат получен: А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева, В. Д. Мазуров, 2009).

Пусть G — простая группа. Если H — группа такая, что $\omega(H) = \omega(G)$ и $|H| = |G|$, то $H \cong G$.

Распознаваемость по спектру

Теорема (Много авторов; финальный результат получен: И. Б. Горшков, А. Н. Гришков, 2016). Если $n \neq 10$, то проблема распознаваемости группы $G = Sym(n)$ по спектру решена. Более того, если $n > 45$, то группа G распознаваема по спектру.

Теорема (В. Д. Мазуров, 1997). Группа $Sz(2^7) \times Sz(2^7)$ распознаваема по спектру.

Теорема (И. Б. Горшков, Н. М., 2021). Группа $J_4 \times J_4$ распознаваема по спектру.

Теорема (И. Б. Горшков, 2022). Если $m > 5$, то группа

$$G = PSL_{2^m}(2) \times PSL_{2^m}(2) \times PSL_{2^m}(2)$$

распознаваема по спектру.

Теорема (N. Yang, И. Б. Горшков, А. М. Старолетов, А. В. Васильев, 2023). Для каждого натурального $k \geq 1$ существует простая группа $G(k)$ такая, что группа $\prod_{i=1}^k G_i$, где $G_i \cong G(k)$ для каждого i , распознаваема по спектру.

Теорема 1 (Р. Cameron, Н.М., 2022). Пусть G — конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$;
- (2) существует конечная группа H с нетривиальным разрешимым радикалом такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Схема доказательства теоремы 1

(2) $\Rightarrow$ (1) следует из [теоремы Мазурова-Shi](#).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть G — группа такая, что существует бесконечно много групп H с тривиальным разрешимым радикалом, для которых выполняется равенство графов $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Показываем, что любая группа H со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ почти проста.

[Предложение 1](#). Пусть π — конечное множество, состоящее из простых чисел. Тогда число неабелевых простых групп S со свойством $\pi(S) \subseteq \pi$ конечно и имеет мощность не более $O(|\pi|^3)$.

Распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля

Теорема 2 (Р. Cameron, Н.М., 2022). Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста;
- (2) вершина 2 не смежна хотя бы с одной нечетной вершиной в $\Gamma(G)$;
- (3) $\Gamma(G)$ содержит хотя бы 3 попарно несмежные вершины.

Следствие 1. Группа G почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля тогда и только тогда, когда любая группа H такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$, почти проста.

Проблема 1. Пусть G — почти простая группа. Определить, является ли G распознаваемой, почти распознаваемой или нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля?

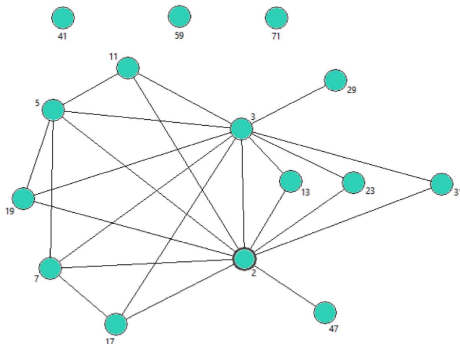
Огромная группа, распознаваема по графу Г.-К.

Пусть M — группа Монстр.

Теорема (А. В. Заварнин, 2006 + М. Lee, Т. Papiel, 2022).

Группа M распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля.

$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8,08 \cdot 10^{53}$; граф Грюнберга–Кегеля M :



Существует 55 простых групп L таких, что любой простой делитель $|L|$ не превосходит 13.

Характеризация по спектру:

- распознаваемы 36;
- 2-распознаваемы 7;
- нераспознаваемы 12.

Характеризация по графу Грюнберга–Кегеля:

- распознаваемы 5;
- 2-распознаваемы 5;
- 3-распознаваемы 3;
- 5-распознаваемы 3;
- нераспознаваемы 38;
- не известно 1.

Проблема 1. Пусть G — почти простая группа. Определить, является ли G распознаваемой, почти распознаваемой или нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля?

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

Теорема (К. Gruenberg, О. Kegel, 1975; опубликована в работе J. Williams, 1981). Если G — группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) G — группа Фробениуса;
- (2) G — 2-фробениусова группа;
- (3) G — расширение нильпотентной группы K с помощью почти простой группы A , где $S \trianglelefteq A \leq \text{Aut}(S)$ и S — простая группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля.

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

Проблема. Описать случаи совпадения графов Грюнберга–Кегеля $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$, где G — почти простая группа, H — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа.

2012, [М. Р. Зиновьева](#), [В. Д. Мазуров](#):

G — простая группа.

2016, [М. Р. Зиновьева](#), [А. С. Кондратьев](#)

+

2018, [И. Б. Горшков](#), [Н. М.](#)

H разрешима.

2023+, [К. А. Ильенко](#), [Н. М.](#)

G почти проста, но не проста, H — неразрешимая группа Фробениуса

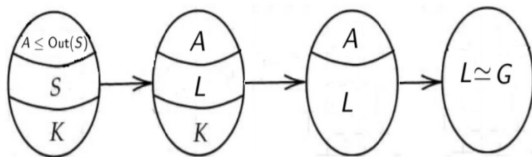
Распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

L — неабелева простая группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$.

Применяем теорему Грюнберга–Кегеля.

Если G — не группа Фробениуса и не 2-фробениусова группа, то существует подгруппа $K \trianglelefteq G$ такая, что K нильпотентна и G/K почти проста с цоколем S .



Простые группы с несвязным графом Г.-К.

Для каждого q графы $\Gamma(E_6(q))$ и $\Gamma({}^2E_6(q))$ имеют 2 компоненты связности.

- ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(3)$ и $E_6(3)$ распознаваемы по графу Грюнберга–Кегеля.

*А. С. Кондратьев, 2019;
W. Guo, А. С. Кондратьев, Н. М., 2021;
А. П. Храмова, Н. М., В. В. Панышин и
А. М. Старолетов, 2021*

Теорема 3 (Н. М., В. В. Панышин, А. М. Старолетов, 2023).
Пусть $L = E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $L \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(L)$. В частности, группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ почти распознаваемы по графу Грюнберга–Кегеля.

Простые группы с несвязным графом Г.-К.

Гипотеза (В. Д. Мазуров, 2005). Если G — простая группа такая, что $\Gamma(G)$ имеет хотя бы 3 компоненты связности и $G \not\cong A_6$, то G распознаваема по спектру.

Гипотеза $\Rightarrow$ теорема: много авторов, финальный шаг в работе А. С. Кондратьева, 2015.

Проблема 2. Пусть G — простая группа такая, что $\Gamma(G)$ имеет хотя бы 3 компоненты связности. Когда G распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля?

Простые группы с несвязным графом Γ -К.

Теорема (J. Williams, А. С. Кондратьев, 1981–1989). Если G — простая группа такая, что $\Gamma(G)$ имеет хотя бы 3 связных компоненты, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) G — спорадическая группа;
- (2) $G \cong A_n$, где n и $n - 2$ — простые числа;
- (3) $G \cong PSL_2(q)$;
- (4) $G \cong P\Omega_{2n}^-(3)$, где n — нечетное простое число;
- (5) $G \in \{PSL_3(4), PSU_6(2), E_7(2), E_7(3), {}^2E_6(2)\}$;
- (6) $G \cong G_2(q)$, где $q \equiv 0 \pmod{3}$, или $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$;
- (7) $G \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$;
- (8) $G \cong F_4(q)$, где q четно, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$;
- (9) $G \cong E_8(q)$.

Простая группа L называется **квазираспознаваемой** по графу Грюнберга–Кегеля, если выполняются следующие утверждения:

- любая группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, обладает единственным неабелевым композиционным фактором S ;
- $S \cong L$.

Замечание. Пусть простая группа G квазираспознаваема по графу Грюнберга–Кегеля. Если H — группа такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ и $|H| = |G|$, то $H \cong G$.

Простые группы с несвязным графом Г.-К.

- Проблема 1 решена для спорадических групп.

М. Hagie, 2003; А. В. Заварницин, 2006
А. С. Кондратьев, 2019 и 2021 (2 статьи)
М. Lee, Т. Popiel, 2022

- Группы A_n , где n и $n - 2$ — простые числа,
*квази*распознаваема по графу Г.-К.

В. Khosravi, А. Z. Moghanjoghi, 2007;
А. М. Старолетов, 2017;
И. Б. Горшков, А. М. Старолетов, 2019

- Проблема 1 решена для групп $PSL_2(q)$, за исключением следующих случаев: $q > 8$ четно или q — простое число и $q \equiv 1 \pmod{12}$ (*необходима ревизия*).

М. Hagie, 2003; В. Khosravi×3, 2007 (2 статьи);
А. Khosravi и В. Khosravi, 2008; В. Khosravi, 2008

Простые группы с несвязным графом Г.-К.

- Группа $P\Omega_{2n}^-(3)$ для нечетного $n \geq 5$ распознаваема по графу Г.-К.; все группы G такие, что $\Gamma(G) = \Gamma(P\Omega_6^-(3))$, известны.

A. Babai и B. Khosravi, 2011

M. F. Ghasemabadi, A. Iranmanesh, N. Ahanjideh, 2012

А. С. Кондратьев и И. В. Храмцов, 2012

- Группы $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2E_6(2)$, $PSL_3(4)$ распознаваемы по графу Г.-К., группа $PSU_6(2)$ 2-распознаваема.

А. С. Кондратьев, 2015, 2019, и 2020 (3 статьи)

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов, 2012

- Группы ${}^2G_2(q)$ распознаваемы по графу Г.-К.

А. В. Заварницин, 2006

- Группы $G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, (проведена ревизия) и ${}^2B_2(2^{2n+1})$ квазираспознаваемы по графу Г.-К.

Q. Zhang, W. Shi, R. Shen, 2011

Простые группы с несвязным графом Г.-К.

- Группы $F_4(q)$, где q четно, и ${}^2F_4(q)$ **квази**распознаваемы по графу Г.-К.

Z. Akhlaghi, M. Khatami, B. Khosravi, 2009

B. Khosravi, A. Babai, 2011

В. В. Панышин, 2023

- Группа $E_8(q)$, где $q \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$, почти распознаваема по графу Г.-К.

А. В. Заварницин, 2013

Теорема 4 (Н. М., В. В. Панышин, А. М. Старолетов, 2023).

Любая конечная простая исключительная группа лиева типа, которая не изоморфна ${}^2B_2(2^{2n+1})$ при $n \geq 1$ или $G_2(3)$ и граф Грюнберга–Кегеля которой имеет не менее 3 компонент связности, почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля. Группы ${}^2B_2(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$, и $G_2(3)$ нераспознаваемы по графу Грюнберга–Кегеля.

Связный граф Грюнберга–Кегеля

Теорема (А. В. Васильев, 2005). Пусть G — неразрешимая группа такая, что вершина 2 не смежна хотя бы с одной нечетной вершиной в $\Gamma(G)$. Тогда существует простая группа S такая, что

$$S \trianglelefteq G/S(G) \leq \text{Aut}(S),$$

где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G .

Теорема 5 (Н. М., И. Б. Горшков и др., 2023+). В условиях предыдущей теоремы выполняется ровно одно из следующих условий:

- (1) все числа, не смежные с 2 в $\Gamma(G)$, лежат в $\pi(S(G))$;
- (2) все числа, не смежные с 2 в $\Gamma(G)$, лежат в $\pi(S) \setminus (\pi(S(G)) \cup \pi((G/S(G))/S))$.

Следствие 2. В графе Грюнберга–Кегеля группы четного порядка множество вершин, не смежных с числом 2, является объединением клик.

Распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля

Спорадические группы	Спорадические группы и ${}^2F_4(2)'$
----------------------	--------------------------------------

Знакопеременные группы	Знакопеременные группы
------------------------	------------------------

Классические группы

$G = \mathrm{PSL}_n(q)$	$G = \mathrm{PSU}_n(q)$	$G = \mathrm{PSp}_n(q)$	Ортогональные группы $G = \mathrm{PO}_n(q)$, $G = \mathrm{P}\Omega_n^+(q)$, $G = \mathrm{P}\Omega_n^-(q)$

Исключительные группы лива типа

$E_6(q)$	$E_7(q)$	$E_8(q)$	${}^2E_6(q)$	${}^3D_4(q)$	$F_4(q)$	${}^2F_4(q)$	$G_2(q)$	${}^2G_2(q)$	${}^2B_2(q)$

Доказана почти полная распознаваемость

Доказана неразпознаваемость

Доказана квадратичная распознаваемость

Решение пока не известно

Теорема (А. В. Заварницин, 2013). Пусть $L = E_8(q)$, где $q \equiv 0, \pm 1 \pmod{5}$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $G \cong E_8(u)$ для некоторого $u \equiv 0, \pm 1 \pmod{5}$.

Теорема 6 (Н. М., В. В. Панышин, А. М. Старолетов, 2022+). Пусть $L = E_8(q)$, где $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $G \cong E_8(u)$ для некоторого $u \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Следствие 3. Группа $E_8(q)$ почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля для любого q .

Следствие 4. Пусть H — группа такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(E_8(q))$ и $|H| = |E_8(q)|$ для некоторого q . Тогда $H \cong E_8(q)$.

Проблема 3. Описать все случаи совпадения графов $\Gamma(E_8(q))$ и $\Gamma(E_8(q_1))$ при $q \neq q_1$.

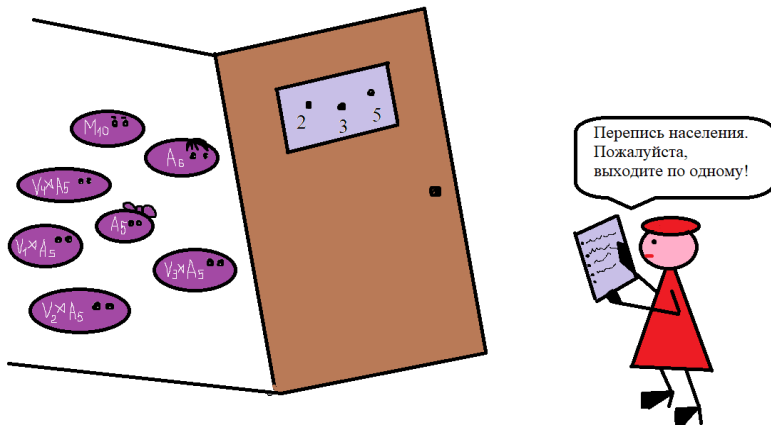
Простые группы с равными графами Γ -К.

Если G проста, то [А. В. Васильев](#) предположил, что существует не более 4 попарно неизоморфных неабелевых простых групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ ([проблема 16.26](#) в "Коуровской тетради").

Пусть G и H — неабелевы простые группы. Исследование случаев совпадения $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$:

- G — спорадическая группа ([М. Hagie, 2003](#)).
- $G \cong A_n$ ([М. А. Звездина, 2013](#)).
- G и H — группы лиева типа и $\text{char}(G) = \text{char}(H)$ ([М. Р. Зиновьева, 2014](#)).
- G и H — группы лиева типа и $\text{char}(G) \neq \text{char}(H)$ ([М. Р. Зиновьева, 2015–2023+, в процессе...](#)).

”Перепись населения” конечных групп



Пусть Γ — граф, вершины которого помечены попарно различными простыми числами. Будем говорить, что Γ — **помеченный граф**.

Теорема 7 (Р. Cameron, Н.М., 2022). Существует функция $F(x) = O(x^7)$ такая, что для любого помеченного графа Γ следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$;
- (2) существует более, чем $F(|V(\Gamma)|)$ попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$, где $V(\Gamma)$ — множество всех вершин Γ .

Схема доказательства теоремы 7

Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля.

Следствие 1. Группа G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста.

Ключевым инструментом в доказательстве теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть π — конечное множество, состоящее из простых чисел. Тогда число почти простых групп S со свойством $\pi(S) \subseteq \pi$ конечно и имеет мощность не более $O(|\pi|^7)$.

Группы с равными графами Грюнберга–Кегеля

Теорема 7. Существует функция $F(x) = O(x^7)$ такая, что для любого помеченного графа Γ следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$;
- (2) существует более, чем $F(|V(\Gamma)|)$ попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$, где $V(\Gamma)$ — множество всех вершин Γ .

Проблема 4. Улучшить верхнюю оценку в теореме 7.

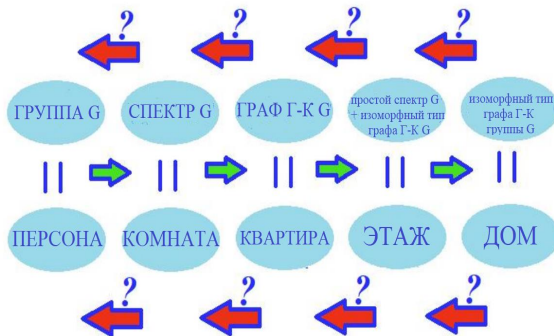
Теорема (А. В. Заварницин, 2006). Не существует константы k такой, что для любой почти простой группы G число попарно неизоморфных почти простых групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, не более, чем k .

Теорема (М. А. Гречкосеева, А. В. Васильев, 2022). В теореме 7 верхняя оценка может быть улучшена до $F(x) = O(x^5)$.

Проблема 5. Пусть Γ — помеченный граф. Найти эффективный алгоритм, который решает следующие проблемы:

- Существует ли (почти) простая группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma$?
- Каковы все (почти) простые группы с этим свойством?

”Адресная книга” конечных групп



Определение. Группа G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля, если для любой группы H изоморфизм графов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ (как абстрактных графов) влечет изоморфизм групп H и G .

(Группа G имеет собственный ”дом”.)

Следствие 1. Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля. Тогда G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста.

Следствие 5. Если группа G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля, то G почти проста.

Проблема 6. Пусть G — почти простая группа. Определить, в каких случаях G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Распознаваемость по изоморфному типу графа Г.–К.

Теорема (А.В. Заварницин, 2006). Если G — группа такая, что $\Gamma(G)$ имеет ровно 6 компонент связности, то $G \cong J_4$. В частности, группа J_4 распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Теорема 9 (Р. Cameron, Н.М., 2022). Группы ${}^2G_2(27)$ и $E_8(2)$ распознаваемы по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Теорема 10 (Н.М., М. Р. Зиновьева, 2023+). Группа $E_8(q)$, где $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$, распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Проблема 7. Существуют ли другие группы, распознаваемые по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля? В частности, существует ли почти простая, но не простая группа с этим свойством?

P. J. Cameron and N. V. Maslova, Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph, J. Algebra, 607:Part A (2022), 186–213.

M. Lee and T. Popiel, M , B and Co_1 are recognisable by their prime graphs, J. Group Theory, (2022), <https://doi.org/10.1515/jgth-2021-0119>.

M. A. Grechkoseeva and A. V. Vasil'ev, On the prime graph of a finite group with unique nonabelian composition factor, Communications in Algebra, 50:8 (2022), 3447–3452.

N.V. Maslova, V.V. Panshin, and A.M. Staroletov, On characterization by Gruenberg-Kegel graph of finite simple exceptional groups of Lie type, European J. Math., 9 (2023), Article number: 78.



Спасибо за внимание!