

Гурвицевы группы

Максим Всемиров

ПОМИ РАН

II Всероссийская научно-практическая конференция
«Математика в современном мире»,
посвященная 160-летию со дня рождения Д. А. Граве
Вологда, 19–23 сентября 2023

Определение

Группа называется $(2,3,7)$ -порожденной, если она порождается элементом порядка 2 и элементом порядка 3, такими, что порядок их произведения равен 7.

Определение

Группа называется $(2,3,7)$ -порожденной, если она порождается элементом порядка 2 и элементом порядка 3, такими, что порядок их произведения равен 7.

Определение

Гурвицевы группы — это конечные $(2,3,7)$ -порожденные группы.

Определение

Группа называется $(2,3,7)$ -порожденной, если она порождается элементом порядка 2 и элементом порядка 3, такими, что порядок их произведения равен 7.

Определение

Гурвицевы группы — это конечные $(2,3,7)$ -порожденные группы.

Иными словами, гурвицевы группы — это конечные нетривиальные факторгруппы группы $T(2, 3, 7)$

$$T(2, 3, 7) = \langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = (XY)^7 = 1 \rangle.$$

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Эти группы

- конечные, если $1/k + 1/m + 1/n > 1$;

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Эти группы

- конечные, если $1/k + 1/m + 1/n > 1$;
- бесконечные, но содержат нормальную абелеву группу конечного индекса, если $1/k + 1/m + 1/n = 1$;

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Эти группы

- конечные, если $1/k + 1/m + 1/n > 1$;
- бесконечные, но содержат нормальную абелеву группу конечного индекса, если $1/k + 1/m + 1/n = 1$;
- бесконечные и имеют сложную структуру, если $1/k + 1/m + 1/n < 1$.

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Эти группы

- конечные, если $1/k + 1/m + 1/n > 1$;
- бесконечные, но содержат нормальную абелеву группу конечного индекса, если $1/k + 1/m + 1/n = 1$;
- бесконечные и имеют сложную структуру, если $1/k + 1/m + 1/n < 1$.

Теорема (Гурвиц)

- Пусть R — компактная комплексная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда $|\text{Aut}R| \leq 84(g - 1)$.

Почему именно $(2,3,7)$ -порожденные группы?

$$T(k, m, n) = \langle X, Y \mid X^k = Y^m = (XY)^n = 1 \rangle.$$

Эти группы

- конечные, если $1/k + 1/m + 1/n > 1$;
- бесконечные, но содержат нормальную абелеву группу конечного индекса, если $1/k + 1/m + 1/n = 1$;
- бесконечные и имеют сложную структуру, если $1/k + 1/m + 1/n < 1$.

Теорема (Гурвиц)

- Пусть R — компактная комплексная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда $|\text{Aut}R| \leq 84(g - 1)$.
- Конечная группа G порядка $84(g - 1)$ является группой автоморфизмов компактной римановой поверхности рода g в точности, когда G гурвицева.

- $G = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{SL}_3(2)$, $|G| = 168$, $g = 3$

образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Соответствующая риманова поверхность — это кватрика Клейна $a^3b + b^3c + c^3a = 0$.

- $G = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{SL}_3(2)$, $|G| = 168$, $g = 3$

образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Соответствующая риманова поверхность — это кватрика Клейна $a^3b + b^3c + c^3a = 0$.

- $G = \mathrm{PSL}_2(8)$, $|G| = 504$, $g = 7$,

образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\epsilon^6 + \epsilon^5 + \epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0.$$

Явные уравнения, описывающие соответствующую поверхность, найдены Макбетом.

- $G = \mathrm{PSL}_2(13)$, $|G| = 1092$, $g = 14$,
образующие:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, xy = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теорема (Макбет, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ с точностью до сопряженности имеется 3 различных набора гурвицевых образующих; один набор для $q = 7$.

Теорема (Макбет, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности в следующих случаях:

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$;

Для $q \neq 7$ с точностью до сопряженности имеется 3 различных набора гурвицевых образующих; один набор для $q = 7$.

- Всякая гурвицева подгруппа в $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета (Коэн, 1981).

- Всякая гурвицева подгруппа в $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета (Коэн, 1981).
- Возникло впечатление, что гурвицевы группы довольно редки.

- Всякая гурвицева подгруппа в $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета (Коэн, 1981).
- Возникло впечатление, что гурвицевы группы довольно редки.
- Однако это впечатление оказалось ошибочным!

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Кондер, 1980)

Знакопеременные группы A_n при $n \geq 168$ гурвицевы.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Кондер, 1980)

Знакопеременные группы A_n при $n \geq 168$ гурвицевы.

Теорема (Луккини, Тамбурини, Уилсон, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Кондер, 1980)

Знакопеременные группы A_n при $n \geq 168$ гурвицевы.

Теорема (Луккини, Тамбурини, Уилсон, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (В., 2004, Сан, 2005)

Для всех $n \geq 252$ и всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Гурвицевы группы большого ранга

Теорема (Кондер, 1980)

Знакопеременные группы A_n при $n \geq 168$ гурвицевы.

Теорема (Луккини, Тамбурины, Уилсон, 2000)

Для всех $n \geq 287$ и всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (В., 2004, Сан, 2005)

Для всех $n \geq 252$ и всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Имеется 90 значений n , меньших 252, для которых также известно, что группы $SL_n(q)$ гурвицевы.

Теорема (В., 2004; Сан 2005)

Для всех $q = p^n$ (p — простое) группы $SL_{49}(q)$ гурвицевы.

Теорема (Луккини, Тамбурини, 1999)

Для всех $n \geq 371$ следующие группы гурвицевы:

- $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{SU}_{2n}(q^2)$, $\Omega_{2n}^+(q)$ для любого $q = p^n$,
- $\mathrm{SU}_{2n+7}(q^2)$, $\Omega_{2n+7}(q)$ для нечетных $q = p^n$.

Теорема (Луккини, Тамбурини, 1999)

Для всех $n \geq 371$ следующие группы гурвицевы:

- $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $\mathrm{SU}_{2n}(q^2)$, $\Omega_{2n}^+(q)$ для любого $q = p^n$,
- $\mathrm{SU}_{2n+7}(q^2)$, $\Omega_{2n+7}(q)$ для нечетных $q = p^n$.

Аналогичные результаты известны и для $(2, 3, k)$ -порождения (Кондер, Луккини, Тамбурини, Уилсон).

Теорема (Малле, 1990, 1995)

- Группы $G_2(q)$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $q \geq 5$;
- Группы ${}^2G_2(3^{2m+1})$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $m \geq 2$;
- Группы ${}^3D_4(q)$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $q \neq 4$, $q \neq 3^m$;
- Группы ${}^2F_4(2^{2m+1})$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Некоторые исключительные группы

Теорема (Малле, 1990, 1995)

- Группы $G_2(q)$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $q \geq 5$;
- Группы ${}^2G_2(3^{2m+1})$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $m \geq 2$;
- Группы ${}^3D_4(q)$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $q \neq 4$, $q \neq 3^m$;
- Группы ${}^2F_4(2^{2m+1})$ гурвицевы тогда и только тогда, когда $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Теорема (Пиерро, 2022)

- Группы $F_4(3)$, $F_4(5)$, $F_4(7)$, $F_4(8)$, $E_6(3)$ и $E_7(2)$ гурвицевы.
- Группы $F_4(2^{3n-2})$, $F_4(2^{3n-1})$, $E_6(7^{3n-2})$, $E_6(7^{3n-1})$, ${}^2E_6(7^n)$ не гурвицевы.

Случай малых рангов и отрицательные результаты

Теорема (Ди Мартино, Тамбурини, Залесский, 2000; Винсент, Залесский, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q^2)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Случай малых рангов и отрицательные результаты

Теорема (Ди Martino, Тамбурини, Залесский, 2000; Винсент, Залесский, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q^2)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Аналогичные результаты известны и для многих других пар (n, q) , $n \leq 38$ (Винсент, Залесский, 2007).

Случай малых рангов и отрицательные результаты

Теорема (Ди Мартино, Тамбурини, Залесский, 2000; Винсент, Залесский, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q^2)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Аналогичные результаты известны и для многих других пар (n, q) , $n \leq 38$ (Винсент, Залесский, 2007).

Теорема (Винсент, Залесский, 2007)

Если $q \not\equiv 1 \pmod{7}$, то группа $SL_{12}(q)$ не гурвицева.

Случай малых рангов и отрицательные результаты

Теорема (Ди Мартино, Тамбурини, Залесский, 2000; Винсент, Залесский, 2007)

- Если $n \leq 11$ или $n = 13$ и $(n, q) \neq (2, 8), (3, 2)$, то группы $SL_n(q)$ и $SU_n(q^2)$ не гурвицевы.
- Если $n = 2, 4, 6, \dots, 20$ и q нечетно, то группы $Sp_n(q)$ не гурвицевы.

Аналогичные результаты известны и для многих других пар (n, q) , $n \leq 38$ (Винсент, Залесский, 2007).

Теорема (Винсент, Залесский, 2007)

Если $q \not\equiv 1 \pmod{7}$, то группа $SL_{12}(q)$ не гурвицева.

Гипотеза

Если $q \equiv 1 \pmod{7}$, то группа $SL_{12}(q)$ гурвицева.

Формула Скотта

Пусть $G = \langle x, y \rangle$, $A \subset G$,

V — векторное пространство над полем F .

$f : G \rightarrow GL(V)$ — представление группы G и f^* — двойственное представление.

Формула Скотта

Пусть $G = \langle x, y \rangle$, $A \subset G$,

V — векторное пространство над полем F .

$f : G \rightarrow GL(V)$ — представление группы G и f^* — двойственное представление.

$$d_V^A = \dim\{v \in V \mid f(a)v = v, \text{ для всех } a \in A\},$$

$$\hat{d}_V^A = \dim\{v \in V \mid f^*(a)v = v, \text{ для всех } a \in A\},$$

Формула Скотта

Пусть $G = \langle x, y \rangle$, $A \subset G$,

V — векторное пространство над полем F .

$f : G \rightarrow GL(V)$ — представление группы G и f^* — двойственное представление.

$$d_V^A = \dim\{v \in V \mid f(a)v = v, \text{ для всех } a \in A\},$$

$$\hat{d}_V^A = \dim\{v \in V \mid f^*(a)v = v, \text{ для всех } a \in A\},$$

Теорема (Скотт)

$$d_V^x + d_V^y + d_V^{xy} \leq \dim V + d_V^H + \hat{d}_V^H.$$

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F)$$

- $V = F^n$;

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F)$$

- $V = F^n$;
- $V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями;

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F)$$

- $V = F^n$;
- $V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями;
- $V = S = S^2(F^n)$;

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F)$$

- $V = F^n$;
- $V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями;
- $V = S = S^2(F^n)$;
- $V = \Lambda = \Lambda^3(F^n)$.

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F)$$

- $V = F^n$;
- $V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями;
- $V = S = S^2(F^n)$;
- $V = \Lambda = \Lambda^3(F^n)$.

Все известные на данный момент препятствия для гурвицевости могут быть объяснены при помощи той или иной версии формулы Скотта.

Открытый вопрос

Верно ли, что все препятствия являются следствиями формулы Скотта?

Пример

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F);$$

$V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями

$$(g, m) \mapsto gmg^{-1}.$$

Если G абсолютно неприводима, то формула Скотта превращается в неравенство

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} \leq n^2 + 2.$$

Пример

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F);$$

$V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями

$$(g, m) \mapsto gmg^{-1}.$$

Если G абсолютно неприводима, то формула Скотта превращается в неравенство

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} \leq n^2 + 2.$$

$$d_M^g = \dim C_M(g)$$

Пример

$$G \leq \mathrm{GL}_n(F);$$

$V = M = \mathrm{Mat}_n(F)$, G действует на M сопряжениями

$$(g, m) \mapsto gmg^{-1}.$$

Если G абсолютно неприводима, то формула Скотта превращается в неравенство

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} \leq n^2 + 2.$$

$$d_M^g = \dim C_M(g)$$

Если g полупрост (то есть диагонализируем), то

$$d_M^g = \sum_{\lambda} m_{\lambda}^2,$$

где m_{λ} — кратность собственного числа λ .

Определение

Тройка $x, y, xy \in \mathrm{GL}_n(F)$ называется жесткой, если для любой другой тройки $x', y', x'y'$, такой, что $x' = x^{g_1}$, $y' = y^{g_2}$, $x'y' = (xy)^{g_3}$, существует общий элемент g , такой, что

$$x' = x^g, \quad y' = y^g, \quad x'y' = (xy)^g.$$

Определение

Тройка $x, y, xy \in \mathrm{GL}_n(F)$ называется жесткой, если для любой другой тройки $x', y', x'y'$, такой, что $x' = x^{g_1}$, $y' = y^{g_2}$, $x'y' = (xy)^{g_3}$, существует общий элемент g , такой, что

$$x' = x^g, \quad y' = y^g, \quad x'y' = (xy)^g.$$

Теорема (Stramback, Volklein)

Если $d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} = n^2 + 2$ и группа $G = \langle x, y \rangle$ абсолютно неприводима, то тройка x, y, xy жесткая.

Пусть L — поле, $\sigma \in \text{Aut}(L)$, $x, y \in \text{GL}_n(L)$.

Теорема (В., 2011; Пелегрини, Тамбурини, В., 2012)

Пусть

$$\sigma(x) = (x^{-1})^{g_1}, \quad \sigma(y) = (y^{-1})^{g_2}, \quad \sigma(xy) = ((xy)^{-1})^{g_3}.$$

Пусть $\langle x, y \rangle$ абсолютно неприводима и

$$d_M^x + d_M^y + d_M^{xy} = n^2 + 2.$$

(i) Если σ — инволюция, то $\langle x, y \rangle$ фиксирует полуторалинейную форму.

(ii) Если $\sigma = \text{id}$, то $\langle x, y \rangle$ фиксирует симметрическую либо кососимметрическую билинейную форму.

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности, когда

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$.

Имеется исключительный изоморфизм $\mathrm{PSL}_2(q) \simeq \mathrm{PSU}_2(q^2)$.

Еще раз о теореме Макбета

Теорема (Macbeath, 1969)

Группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ гурвицевы в точности, когда

- $q = p$, p простое, $p \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$;
- $q = p^3$, p простое, $p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$.

Имеется исключительный изоморфизм $\mathrm{PSL}_2(q) \simeq \mathrm{PSU}_2(q^2)$.

Теорема (Макбет; современная формулировка)

Пусть n_2 — порядок p по модулю 7, если $p \neq 7$. Следующие группы гурвицевы

- $\mathrm{PSL}_2(7)$;
- $\mathrm{PSL}_2(p^{n_2})$, если n_2 нечетно;
- $\mathrm{PSU}_2(p^{n_2})$, если n_2 четно.

Теорема (Коэн, 1981)

Всякая абсолютно неприводимая подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета.

Теорема (Коэн, 1981)

Всякая абсолютно неприводимая подгруппа $\mathrm{PSL}_3(q)$ изоморфна одной из групп из списка Макбета.

Теорема (Тамбурины, В., 2009)

Всякая абсолютно неприводимая гурвицева подгруппа $\mathrm{PSL}_4(q)$ изоморфна либо группе из списка Макбета, либо $\mathrm{PSL}_2(p) \times \mathrm{PSL}_2(p)$, $p \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

Теорема (Тамбурины, Залесский, 2005)

Абсолютно неприводимые гурвицевы подгруппы $\mathrm{PSL}_5(q)$ исчерпываются следующими:

- $\mathrm{PSL}_5(p)$, p простое, $p \equiv 1, 6 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSL}_5(p^3)$, p простое, $p \equiv 11, 16, 26, 31 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^2)$, p простое, $p \equiv 29, 34 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^4)$, p простое, $p \equiv 8, 13, 22, 27 \pmod{35}$ или $p = 7$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^6)$, p простое, $p \equiv 4, 9, 19, 24 \pmod{35}$;
- $\mathrm{PSU}_5(p^{12})$, p простое, $p \equiv 2, 3, 12, 17, 18, 23, 32, 33 \pmod{35}$.

Теорема (Тамбурини, В., 2006)

Пусть $p \neq 3$ и n_6 — порядок p по модулю 9. Следующие группы гурвицевы:

- $\mathrm{PSL}_6(p^{n_6})$, если n_6 нечетно,
- $\mathrm{PSU}_6(p^{n_6})$, если n_6 четно.

Теорема (Тамбурины, В., 2006)

Пусть $p \neq 3$ и n_6 — порядок p по модулю 9. Следующие группы гурвицевы:

- $\text{PSL}_6(p^{n_6})$, если n_6 нечетно,
- $\text{PSU}_6(p^{n_6})$, если n_6 четно.

Теорема (Тамбурины, В., 2006)

Пусть $p \neq 7$ и n_7 — порядок p по модулю 49. Следующие группы гурвицевы:

- $\text{PSL}_7(p^{n_7})$, если n_7 нечетно,
- $\text{PSU}_7(p^{n_7})$, если n_7 четно.

Гурвицевы тройки в $\mathrm{PSL}_n(q)$ с точностью до сопряженности параметризованы в случаях

Гурвицевы тройки в $\mathrm{PSL}_n(q)$ с точностью до сопряженности параметризованы в случаях $n = 7$ (Тамбурины, В., 2009);

Гурвицевы тройки в $\mathrm{PSL}_n(q)$ с точностью до сопряженности параметризованы в случаях $n = 7$ (Тамбурины, В., 2009); $n = 6$ (Тамбурины, В., в работе).

Гурвицевы тройки в $\mathrm{PSL}_n(q)$ с точностью до сопряженности параметризованы в случаях $n = 7$ (Тамбурины, В., 2009);
 $n = 6$ (Тамбурины, В., в работе).

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & r_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r_5 & 0 & r_8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r_6 & 0 & r_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(I) $r_3, r_4 \in F$, $r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1 \neq 0$ и

$$r_1 = -r_3^2 - 2r_3 - r_4, \quad r_5 = -r_3 - 1, \quad r_6 = 0, \quad r_9 = r_3 - r_4,$$

$$r_2 = \frac{r_3^4 + r_3^3 r_4 + 4r_3^3 + 3r_3^2 r_4 + 3r_3^2 - 2r_3 - r_4^3 - r_4^2 - 2r_4 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1},$$

$$r_7 = -\frac{r_3^3 r_4 + r_3^3 + r_3^2 r_4^2 + 4r_3^2 r_4 + 4r_3^2 + 3r_3 r_4^2 + 3r_3 r_4 + 3r_3 + r_4^4 + r_4^3 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1},$$

$$r_8 = \frac{r_3^4 + r_3^3 r_4 + 3r_3^3 + r_3^2 r_4 + r_3 r_4^3 - r_3 r_4^2 - 4r_3 r_4 - 4r_3 - r_4^2 - 3r_4 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1}.$$

(I) $r_3, r_4 \in F$, $r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1 \neq 0$ и

$$r_1 = -r_3^2 - 2r_3 - r_4, \quad r_5 = -r_3 - 1, \quad r_6 = 0, \quad r_9 = r_3 - r_4,$$

$$r_2 = \frac{r_3^4 + r_3^3 r_4 + 4r_3^3 + 3r_3^2 r_4 + 3r_3^2 - 2r_3 - r_4^3 - r_4^2 - 2r_4 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1},$$

$$r_7 = -\frac{r_3^3 r_4 + r_3^3 + r_3^2 r_4^2 + 4r_3^2 r_4 + 4r_3^2 + 3r_3 r_4^2 + 3r_3 r_4 + 3r_3 + r_4^4 + r_4^3 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1},$$

$$r_8 = \frac{r_3^4 + r_3^3 r_4 + 3r_3^3 + r_3^2 r_4 + r_3 r_4^3 - r_3 r_4^2 - 4r_3 r_4 - 4r_3 - r_4^2 - 3r_4 - 2}{r_3 r_4 + r_4^2 + r_4 + 1}.$$

(II) $r_2 \in F$ и $r_1 = -4$, $r_3 = -3$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, $r_6 = 0$, $r_7 = r_2 + 2$,
 $r_8 = 2r_2 + 8$, $r_9 = -4$.

(III) $p \neq 7$, $r_2 \in F$, и

$$\begin{aligned}r_4 &= \epsilon^k, \quad r_6 = 0, \\r_1 &= -\epsilon^{5k} - \epsilon^{2k} - \epsilon^k - 1, \\r_3 &= \epsilon^{5k} + \epsilon^{4k} + \epsilon^{3k} + \epsilon^{2k}, \\r_5 &= -\epsilon^{5k} - \epsilon^{4k} - \epsilon^{3k} - \epsilon^{2k} - 1, \\r_7 &= \epsilon^k r_2 - 2\epsilon^{5k} - 2\epsilon^{2k} - 1, \\r_8 &= (\epsilon^k + 1)r_2 - 2\epsilon^{5k} - \epsilon^{4k} - \epsilon^{3k} - \epsilon^{2k} + \epsilon^k - 2, \\r_9 &= \epsilon^{5k} + \epsilon^{4k} + \epsilon^{3k} + \epsilon^{2k} - \epsilon^k\end{aligned}$$

для некоторого $k \in \{1, \dots, 6\}$.

$n = 7$: (продолжение)

(IV) $r_3 \in F$, $r_3 \neq -1$ и для некоторого $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}r_4 &= 0, & r_5 &= -r_3 - 1, & r_6 &= \omega^k, & r_9 &= r_3, \\r_1 &= -\frac{(\omega^k + 1)r_3 + 2\omega^k + 2}{r_3 + 1} \\r_2 &= \frac{(\omega^k + 1)r_3^3 + (3\omega^k + 3)r_3^2 + (\omega^k + 2)r_3 - 2\omega^k}{r_3 + 1}, \\r_7 &= -\frac{(\omega^k + 1)r_3^2 + (3\omega^k + 2)r_3 + 2\omega^k + 2}{r_3 + 1}, \\r_8 &= \frac{(\omega^k + 1)r_3^3 + (2\omega^k + 2)r_3^2 - 2\omega^k - 2}{r_3 + 1}.\end{aligned}$$

(V) $p \neq 3$ и для некоторого $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{7 - 10\omega^k}{9}, & r_2 &= \frac{8 - 8\omega^k}{9}, & r_3 &= r_4 = -\frac{2 + \omega^k}{3}, & r_5 &= \frac{\omega^k - 1}{3}, \\r_6 &= \omega^k, & r_7 &= r_8 = -2\omega^k - 1, & r_9 &= 0.\end{aligned}$$

Теорема (В., в работе)

Абсолютно неприводимые гурвицевы подгруппы $SL_7(q)$, (q нечетно) исчерпываются следующим списком

- $G_2(q)$, $q > 4$;
- ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m > 0$;
- $PSL_2(q)$;
- J_1 ;
- $PSL_2(8)$;
- $PSL_2(7)$;
- $PSL_2(7).2^3$.

Некоторые (но не все) гурвицевы образующие для $G_2(q)$ были найдены Пеллегрини и Тамбурины (2014).

Спасибо за внимание!