



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику

Горская В.А.

(Аспирантская школа по математике,  
кафедра фундаментальной математики НИУ ВШЭ-Нижний Новгород)

19 сентября 2023 г.

# Определения и обозначения

- $C_n$  – плоская вещественная проективная кривая степени  $n$ ,  
т. е. однородный многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{R}$  от однородных координат  $(x_0:x_1:x_2)$  в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.
- $\mathbb{R}C_n = \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{RP}^2 \mid C_n(x_0, x_1, x_2) = 0\}$  – множество вещественных точек кривой  $C_n$ .
- Для краткости при  $n = 2$  ( $n = 3$ ) кривую и множество её вещественных точек будем называть *коникой* (соответственно, *кубикой*).
- Кривая  $C_n$  называется *неособой*, если первые частные производные многочлена  $C_n(x_0, x_1, x_2)$  по переменным  $x_0, x_1, x_2$  не обращаются одновременно в нуль (в  $\mathbb{CP}^2$ ).
- **Теорема Харнака.**  $N \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ , и эта оценка точна для  $\forall n$ .
- Кривая  $C_n$  называется *M-кривой*, если  $\mathbb{R}C_n$  имеет максимально возможное (по теореме Харнака) для данной степени  $n$  число компонент связности.

# Постановка задачи

Цель работы – найти изотопическую классификацию множеств  $\mathbb{R}C_3 \cup \mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_2$  в  $\mathbb{R}P^2$ , предполагая выполнение следующих условий:

(i)  $C_2$ ,  $\tilde{C}_2$  и  $C_3$  являются  $M$ -кривыми,  
т. е. вещественная схема каждой из кривых  $C_2$  и  $\tilde{C}_2$  представляет собой один овал, а  
вещественная схема кривой  $C_3$  состоит из овала и нечётной ветви.

(ii) кривые-сомножители пересекаются только попарно и без касания в максимально  
возможном числе точек, т.е.

$$\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4;$$

все точки пересечения кубики с кониками расположены на нечётной ветви кубики.

# Ограничения на взаимные расположения кривых

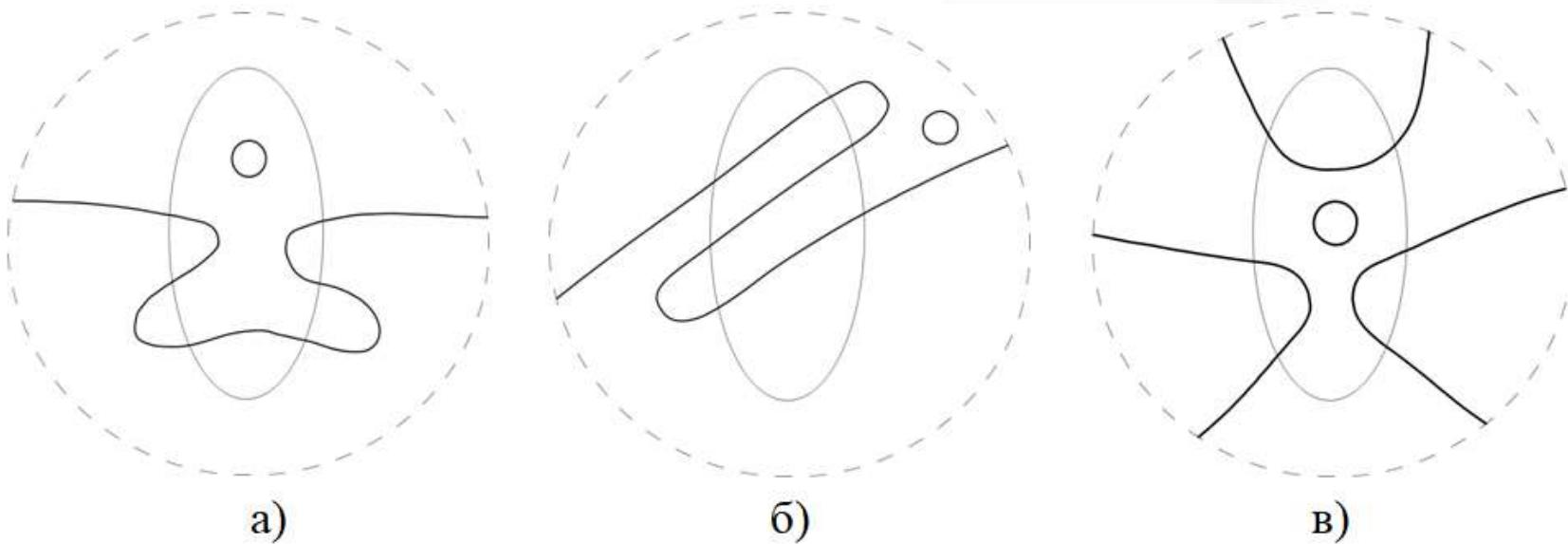


Рис.1. Типы расположений  $M$ -кубики и неособой коники

# Ограничения на взаимные расположения кривых

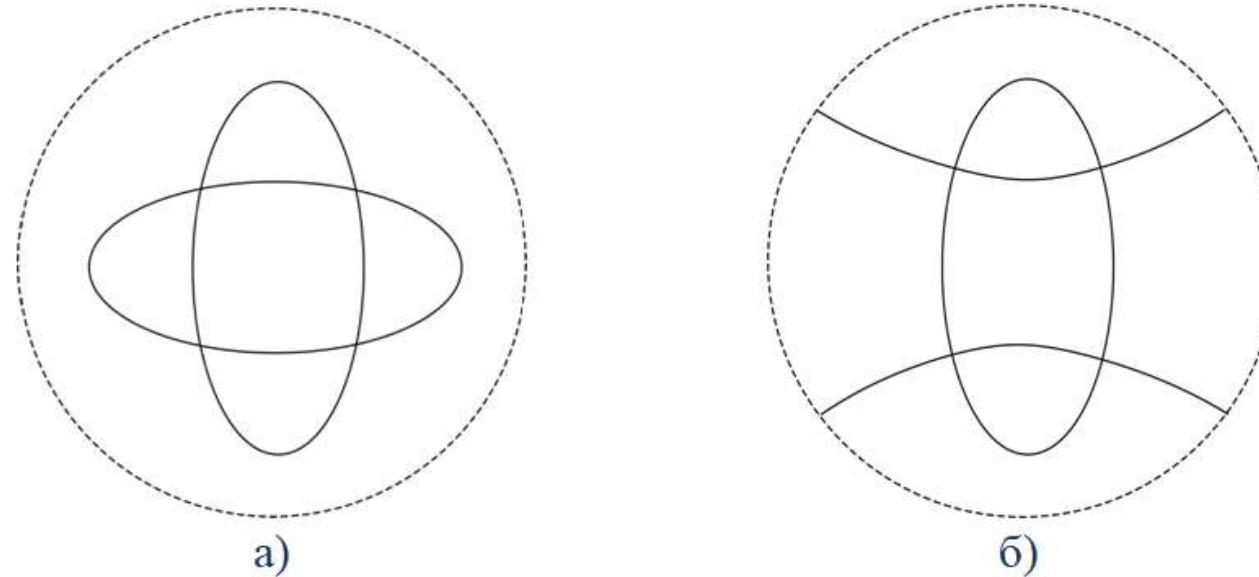


Рис.2. Типы расположений двух неособых коник

В дополнение к условиям (i), (ii) предполагается выполненным условие:

(iii) коники расположены так, как на рис.2.а).

# Перечисление допустимых топологических моделей

- Горская В.А. О кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику // Алгебра и анализ (2023, в печати).

В дополнение к условиям (i) – (iii) предполагается выполненным условие:

(iv) все шесть общих точек нечётной ветви кубики с одной из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне второй коники; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах.

Назовем моделью схему расположения ветвей кубики и коник, удовлетворяющих условиям (i) – (iv)

# Перечисление допустимых топологических моделей

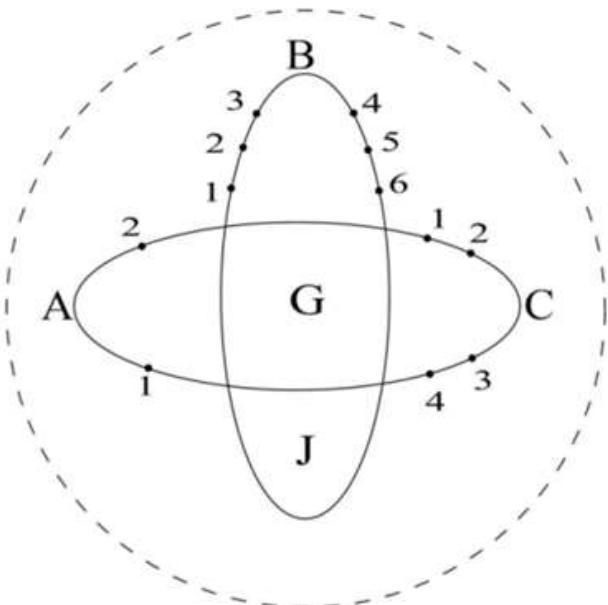


Рис.3

Пусть  $X, Y \in \{A, B, C\}$ . Если при движении по нечётной ветви сначала проходится какая-то группа из  $k$  точек на дуге  $X$ , а затем – какая-то группа из  $l$  точек на другой дуге  $Y$ , будем записывать это в виде  $kX + lY$ . Нетрудно перечислить все возможные варианты прохождения этих групп точек при непрерывном движении по нечётной ветви:

$2A + 6B + 4C$	$2A + 2B + 2C + 4B + 2C$
$4C + 2A + 6B$	$2A + 4B + 2C + 2B + 2C$
$6B + 4C + 2A$	$2C + 2B + 2C + 2A + 4B$
$2C + 6B + 2C + 2A$	$2C + 4B + 2C + 2A + 2B$
$2C + 6B + 2C + 2A$	$2C + 2A + 4B + 2C + 2B$
$2A + 2B + 4C + 4B$	$2C + 2A + 2B + 2C + 4B$
$2A + 4B + 4C + 2B$	$2B + 2C + 4B + 2C + 2A$
$4B + 2A + 2B + 4C$	$4B + 2C + 2B + 2C + 2A$
$2B + 2A + 4B + 4C$	$2B + 2A + 2B + 4C + 2B$
$4B + 4C + 2A + 2B$	$2A + 2B + 2C + 2B + 2C + 2B$
$2B + 4C + 2A + 4B$	$2B + 2C + 2B + 2C + 2A + 2B$

# Перечисление допустимых топологических моделей

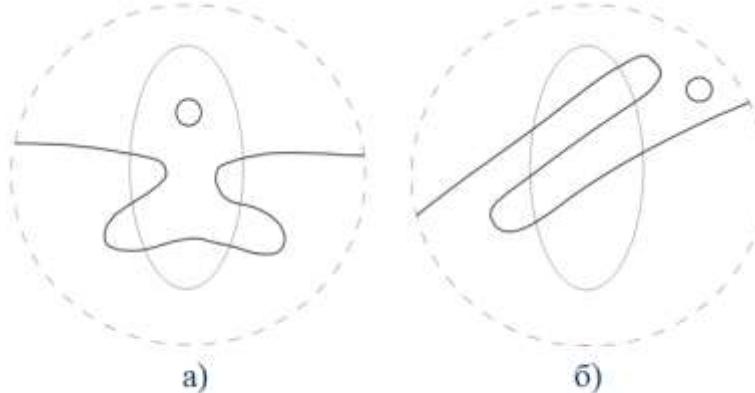


Рис.1.

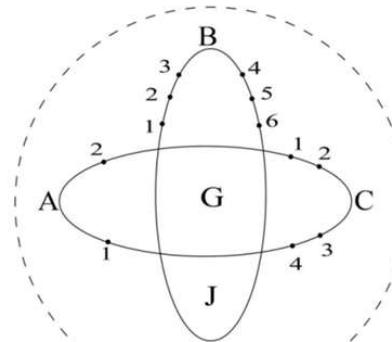


Рис.3

**Лемма 1.** На дуге  $B$  возможны только следующие (с точностью до обратных) циклические перестановки порядка 6:

$(123456), (165432), (321654), (543216)$  (отвечают случаю рис. 1а));

$(123654), (165234), (321456), (345216)$  (отвечают случаю рис. 1б)).

На дуге  $C$  возможны только следующие (с точностью до обратных) циклические перестановки порядка 4:  $(1234), (1432), (3214)$ .

# Перечисление допустимых топологических моделей

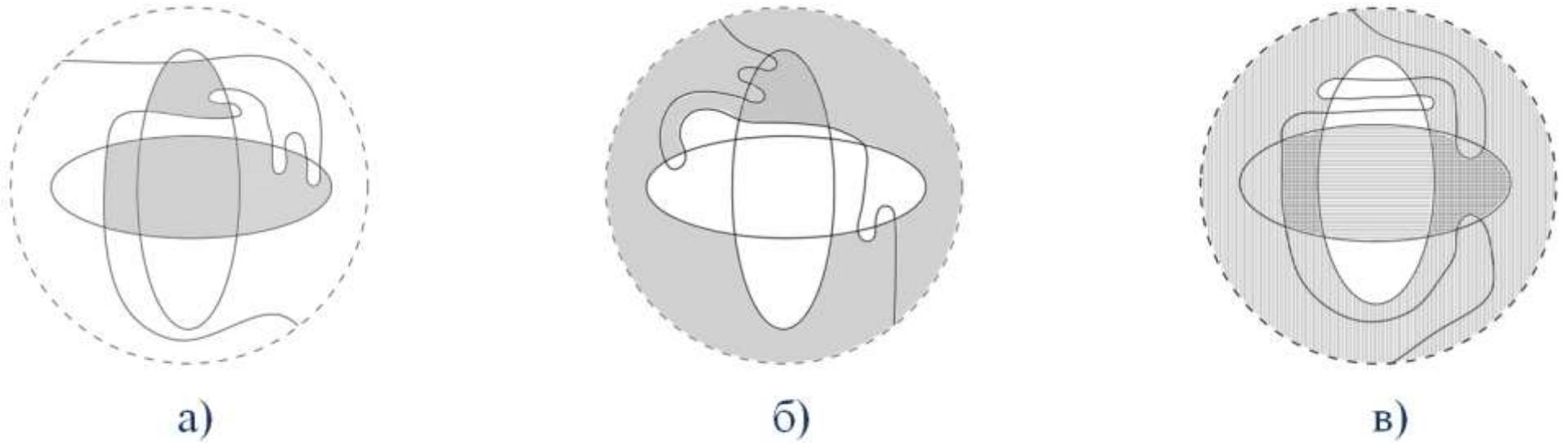


Рис.4. Области для расположения овалов кубики

# Перечисление допустимых топологических моделей

**Теорема Брюзотти, 1921.** Пусть кривая  $C_n$  не имеет кратных компонент и все ее особые точки простые двойные. Тогда с помощью достаточно малых изменений коэффициентов кривой  $C_n$  можно получить вещественную кривую степени  $n$ , которая в окрестности каждой особой точки типа «крест» (трансверсальное пересечение ветвей) будет иметь один из заранее выбранных видов  $A, B, C$ , и в окрестности каждой уединенной особой точки — один из заранее выбранных видов  $A', B', C'$  (рис. 5).

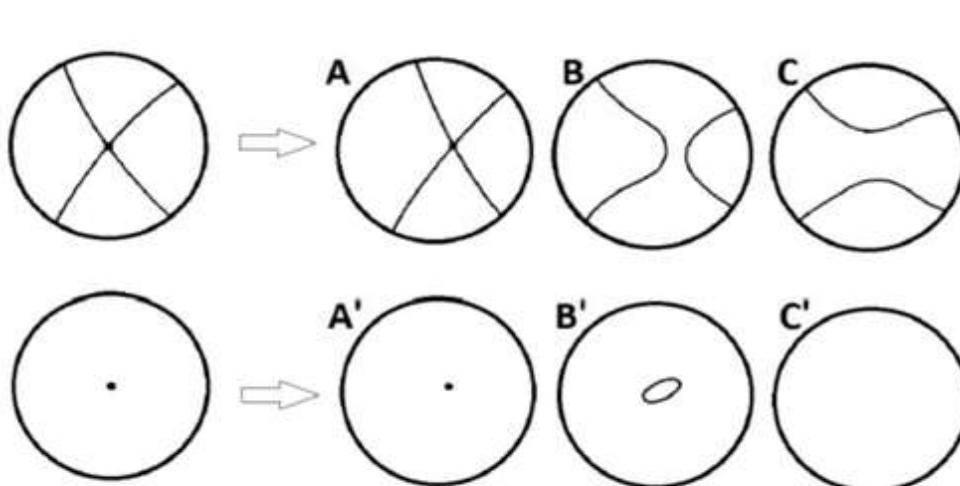


Рис.5

# Перечисление допустимых топологических моделей

**Лемма 2.** Модели, показанные на рис. 6, не могут быть реализованы как схемы какой-либо кривой степени 7.

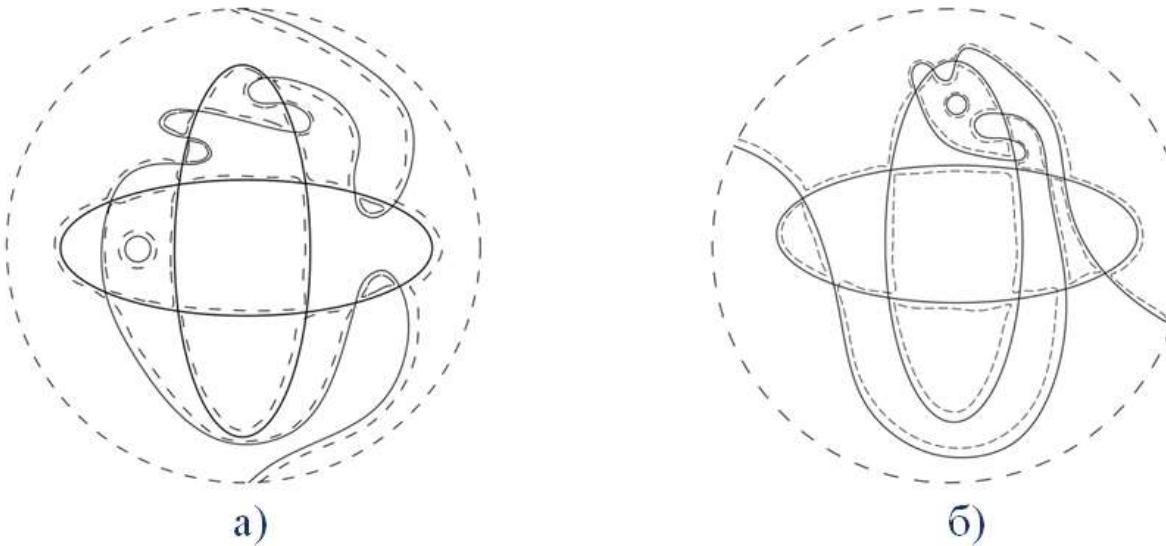


Рис.6. Примеры применения теоремы Брюзотти

В случае рис. 6а) возмущенная схема (на рисунке она показана пунктиром) содержит гнездо веса три<sup>1</sup>; в случае рис. 6б) возмущённая схема содержит два гнезда веса 2. И то и другое невозможно для кривой степени 7 ввиду противоречия с теоремой Безу при пересечении с прямой.

<sup>1</sup> Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений

Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. No. 38. P. 779–810.

Пусть  $C_7$  – заданная алгебраическая кривая. Предположим, что существует точка  $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_7$  такая, что пучок  $L_p$  прямых с центром в этой точке является *максимальным*, т. е. обладает следующими свойствами:

- а) в  $L_p$  найдется прямая  $l_{max}$ , пересекающая кривую  $\mathbb{R}C_7$  в 7 различных точках («*максимальная прямая*»);
- б) любая прямая  $l \in L_p$  пересекает кривую  $L_p$  не менее, чем в 5 различных точках;
- с) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с  $\mathbb{R}C_7$ , т. е. каждая из таких критических прямых либо касается  $\mathbb{R}C_7$ , либо пересекает  $\mathbb{R}C_7$  в её двойной точке без касания.

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений

Выберем аффинные координаты  $(x, y)$  так, чтобы прямая  $l_{max}$  (а следовательно, и точка  $p$ ) оказалась в бесконечности, тогда пучок  $L_p$  станет пучком параллельных прямых  $\{l_t\}$  (Рис.7), где  $l_t$  — прямая, заданная уравнением  $x = t$ . Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой*  $l_{max}$

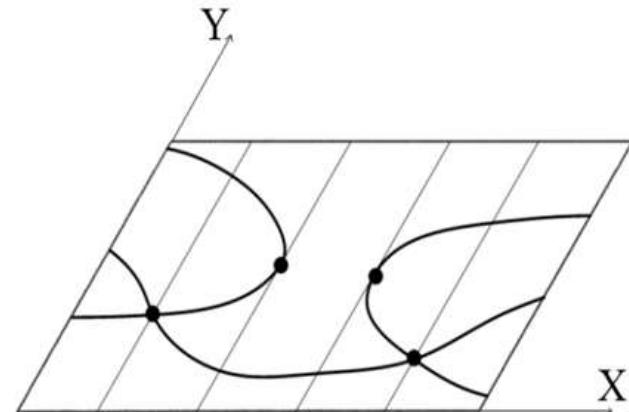


Рис.7

7	—	—	7	—	—
:	:	:	:	:	:
$k+2$	—	—	$k+2$	—	—
$k+1$	—	—	$k+1$	—	—
$k$	—	—	$k$	—	—
$k-1$	—	—	$k-1$	—	—
:	:	:	:	:	:
1	—	—	1	—	—

$\beth_k$	$\sqsubset_k$	$\sqcup_k$
-----------	---------------	------------

Рис.8

Код развёртки представляет собой последовательность символов вида  $\sqsubset_k$ ,  $\sqcup_k$ ,  $\times_k$ , описывающих локальный вид кривой в окрестности критических точек на критических прямых пучка (рис.8), индекс  $k$  показывает номер слоя, считая снизу.

# Запреты с помощью теориикос и зацеплений

Пусть  $\mathbb{C}L_p$  – пучок комплексных прямых с центром в точке  $p$  в комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$  и  $M = \mathbb{C}C_7 \cap \mathbb{C}L_p$ . Множество  $M$  гомеоморфно набору окружностей; некоторые из них попарно склеены в двойных точках кривой  $\mathbb{R}C_n$  и в точках касания прямых пучка  $L_p$  с этой кривой (Рис.9 в центре).

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (Рис.9 справа), получим косу  $b(C_7, p)$  из 7 нитей, замыкание которой есть зацепление  $K(C_7, p)$ . Зацепление, полученное таким способом, соответствует исходной схеме кривой. Для дальнейшего важно, что в силу предположения о максимальности пучка коса  $b(C_7, p)$  однозначно определяется взаимным расположением в  $\mathbb{R}P^2$  кривой  $\mathbb{R}C_7$  и пучка  $L_p$ , т. е. развёрткой, отвечающей максимальной прямой.

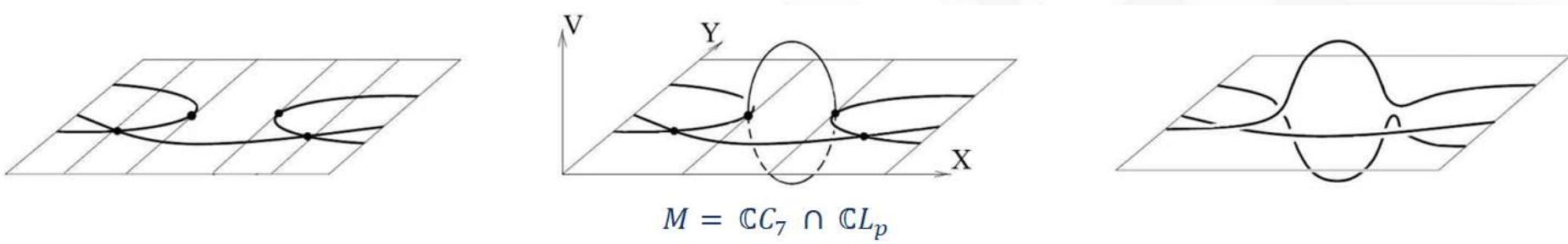


Рис. 9. Образование косы

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений

Lee R., Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. No. 22. P. 191–202.

Известно, что полученная коса  $b(C_7, p)$  должна быть *квазиположительной*, т. е. допускать запись в виде

$$\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1},$$

где  $\omega_j$  – некоторые слова в алфавите  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_6, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_6^{-1}\}$ , а  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , – стандартные образующие группы  $B_7$  (Рис. 8).

Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой  $\mathbb{R}C_7$  при каждом возможном взаимном расположении пучка  $L_p$  и этой модели коса  $b(C_7, p)$  не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени 7.

В качестве необходимого условия квазиположительности С. Ю. Оревков предложил использовать

**Неравенство Мурасуги-Тристрама.** Если  $b = \prod \sigma_i^{k_i} \in B_7$  – квазиположительная коса из 7 нитей, то для её замыкания  $L$  выполняется неравенство

$$h = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где  $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$  – сигнатура;

$n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$  – дефект;  $V$  – матрица Зейферта;

$e(b) = \sum k_j$  – алгебраическая степень косы  $b$  (т. е. сумма всех показателей степеней в разложении косы  $b$  по образующим группы  $B_7$ ).

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений. Пример применения метода

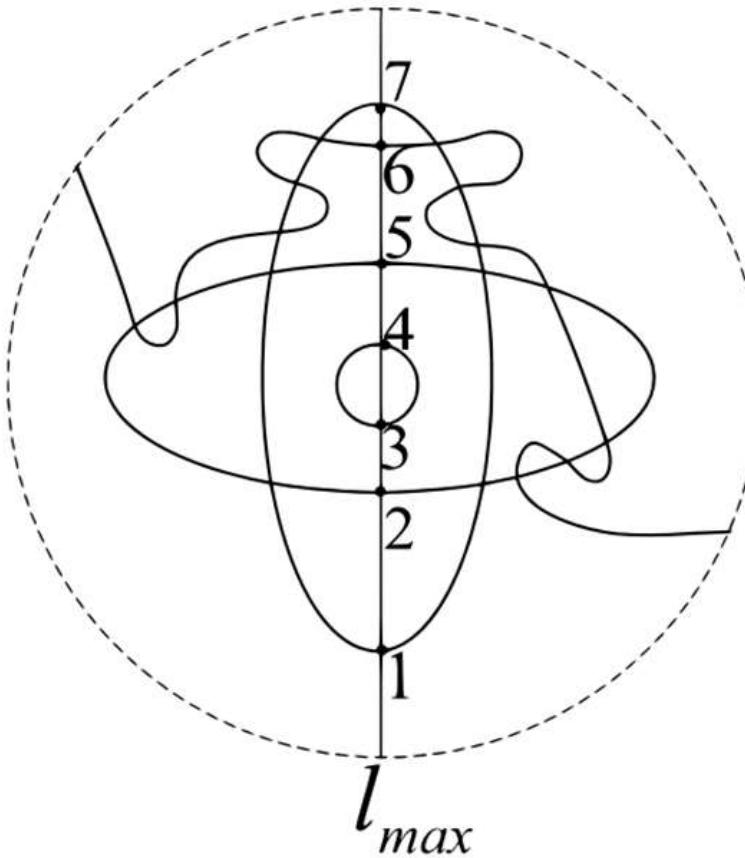


Рис.10

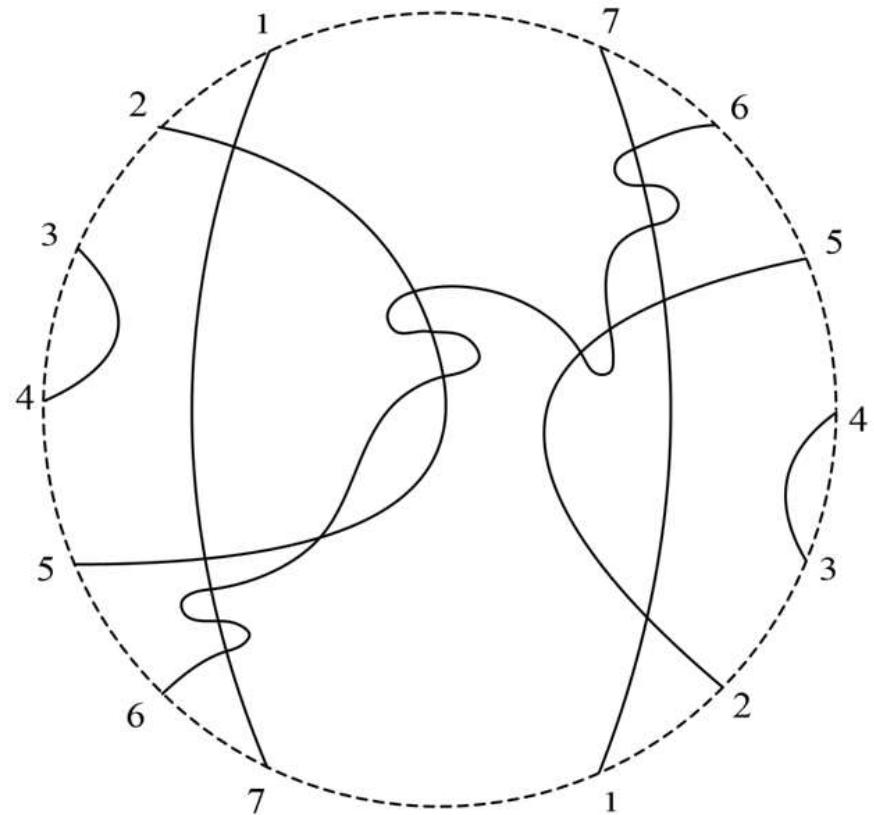
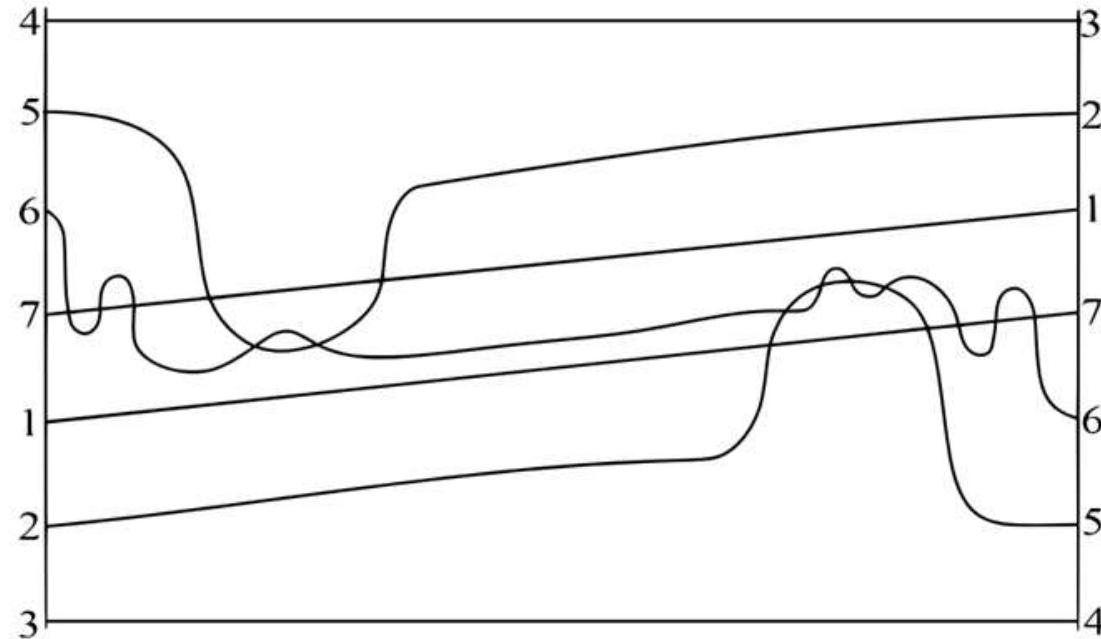


Рис.11

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений. Пример применения метода



$\times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 4 \times 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$$h = 2$$

Рис.12

# Запреты с помощью теории кос и зацеплений. Пример применения метода

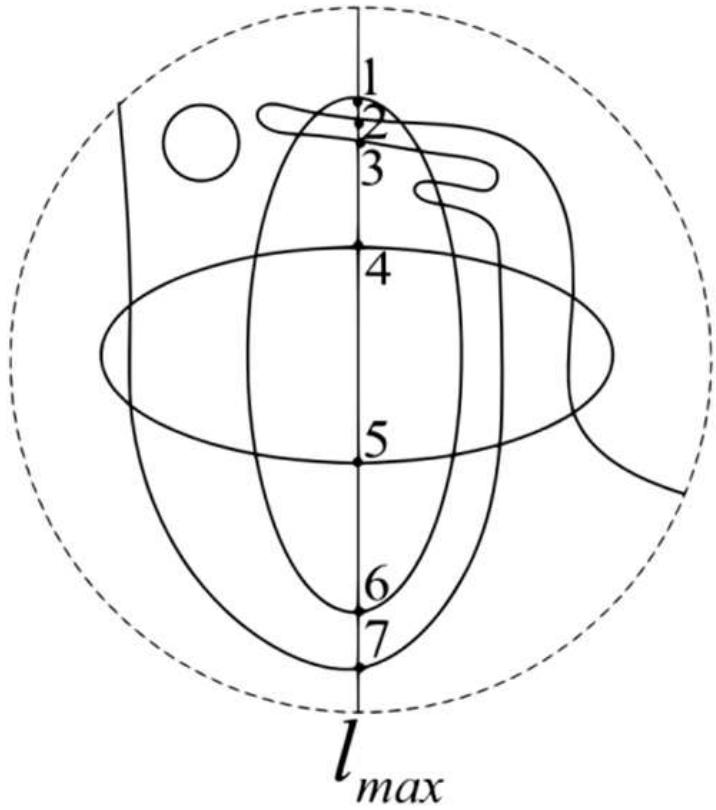


Рис.13

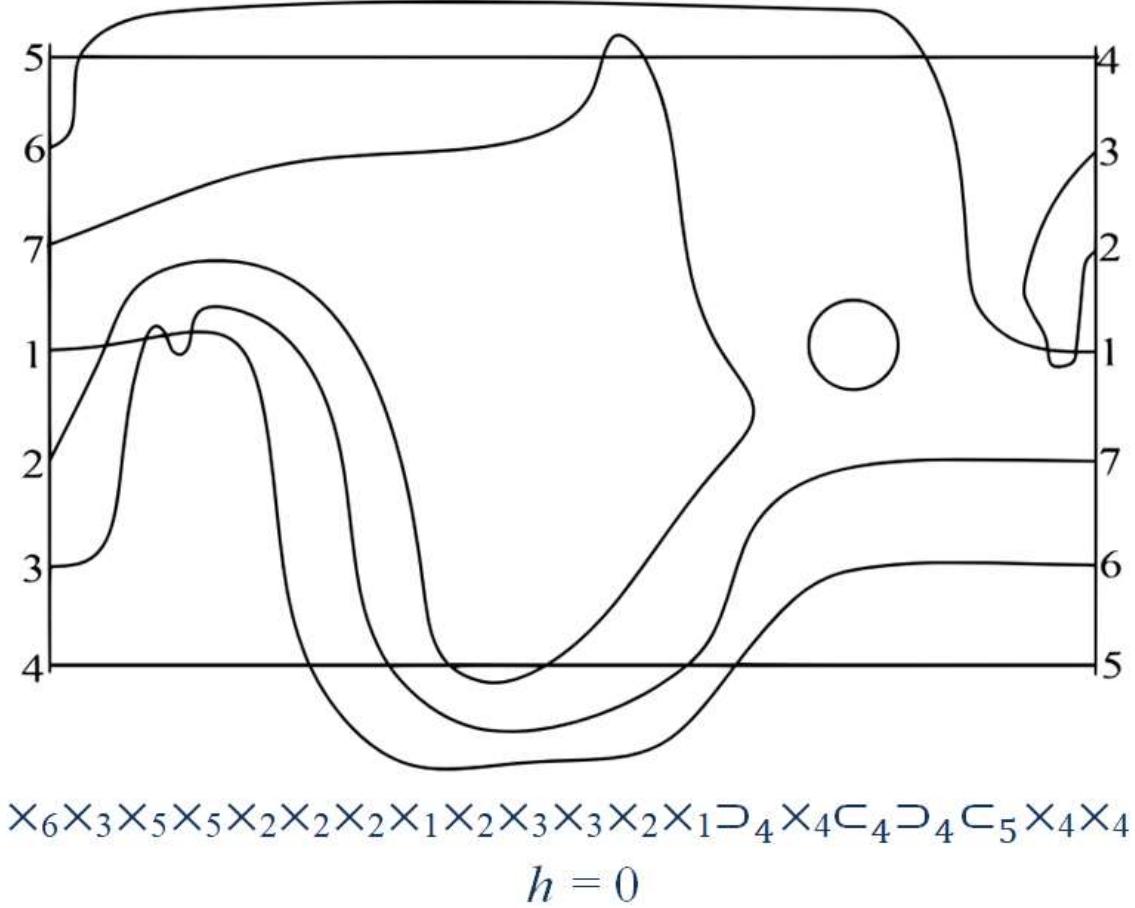


Рис.14

# Построения

Kuzmenko T. V, Polotovskii G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of  $M$ -curves in general position // Translations of the American Mathematical Society. Series 2. 1996. Vol. 173. P. 165–178.

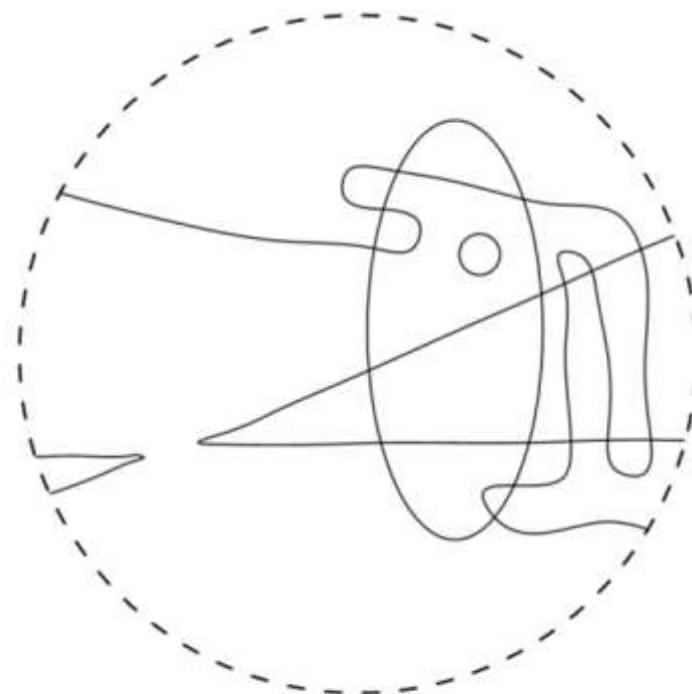
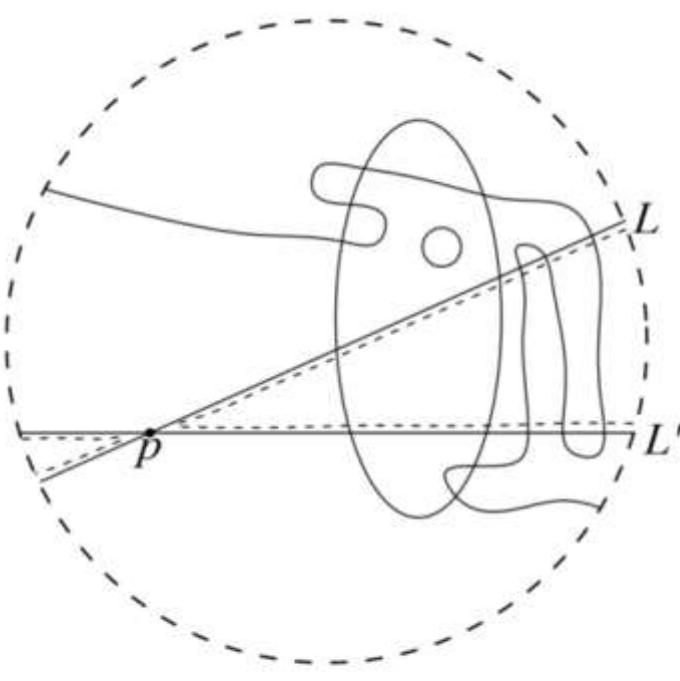


Рис. 15

# Построения

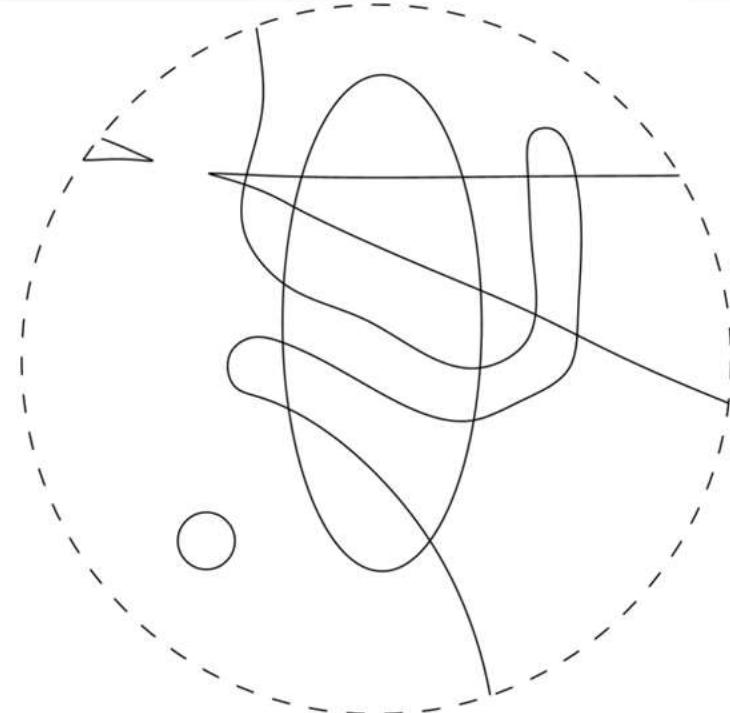
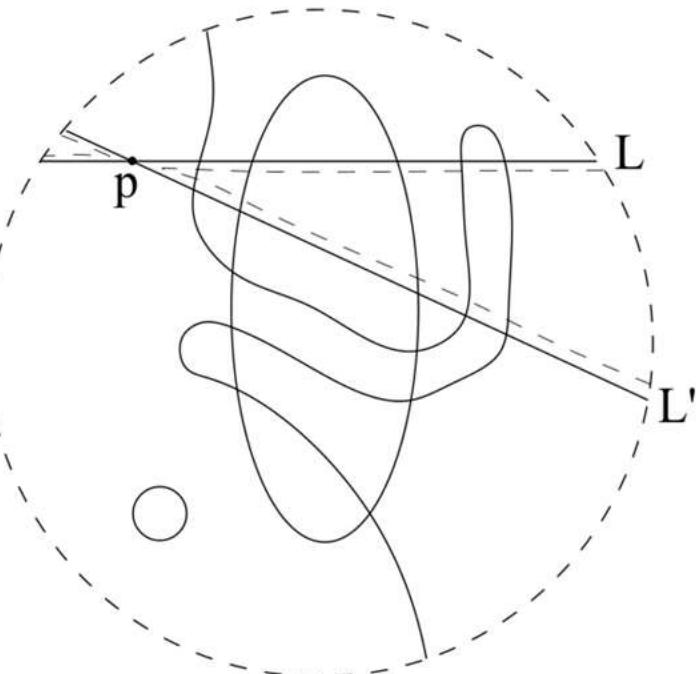


Рис.16

# Результат

**Теорема 1.** Расположения кривых вида  $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_2 \cup \mathbb{R}C_3$ , удовлетворяющие условиям (i) – (iv), отличные от показанных на рис. 17 и 18, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих двадцати двух расположений десять (рис. 17) реализованы распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости двенадцати оставшихся (рис. 18) открыт.

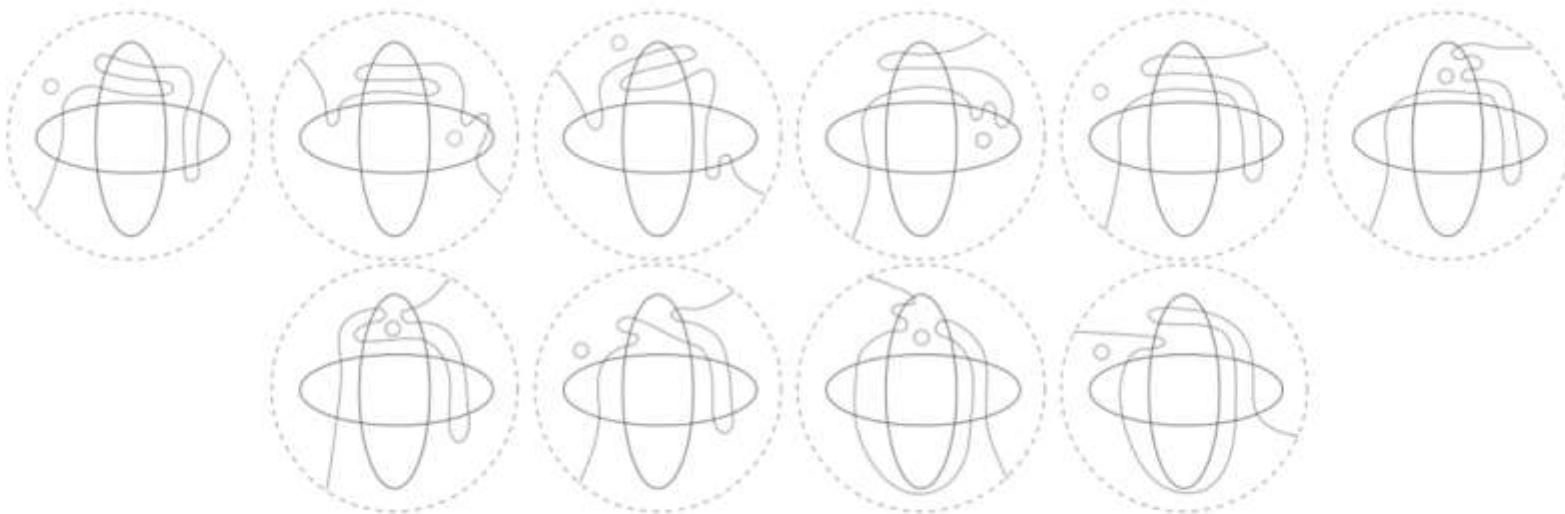


Рис.17. Реализованные схемы

# Результат

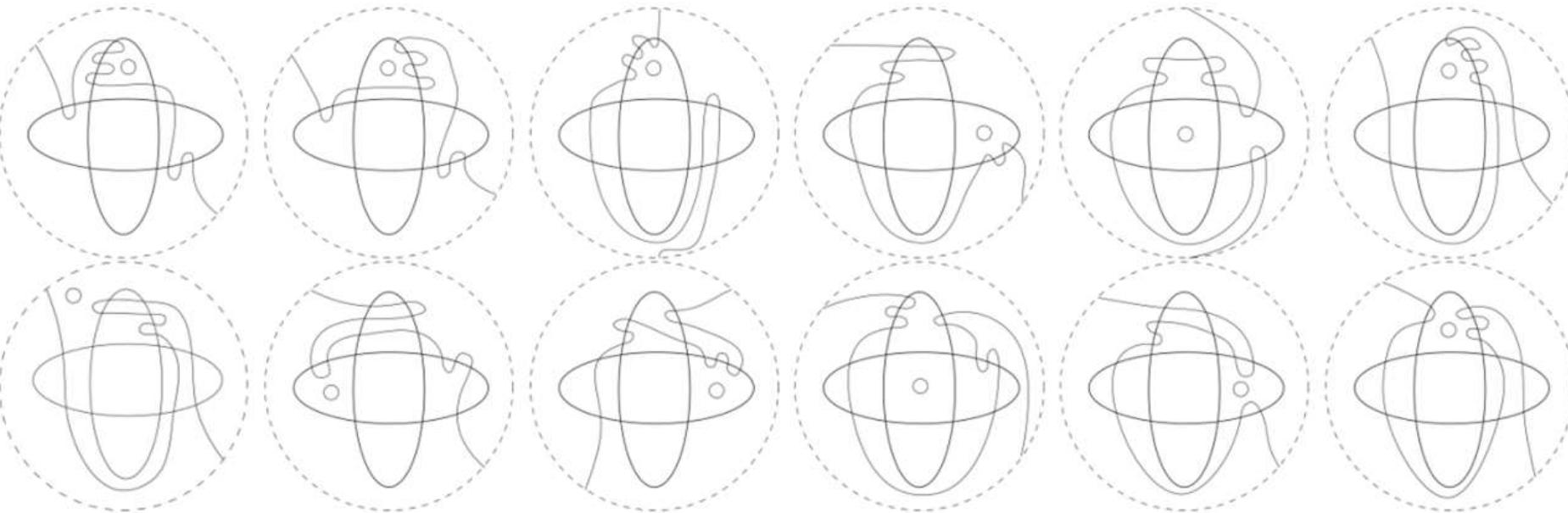


Рис.18. Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт

# Перечисление допустимых топологических моделей

2. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. 2020. 22:1. С.24-37.

В дополнение к условиям (i) – (iii) предполагаются выполненными условия:

(iv) для каждой из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;

(v) точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не перемежаются, т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй.

# Результат

**Теорема 2.** Модели, отличные от шести моделей, показанных на Рис. 19, 20, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих шести модели Рис. 19 реализуются распадающимися кривыми степени 7, удовлетворяющими условиям (i) – (v), а вопрос о реализуемости двух оставшихся (Рис. 20) открыт.

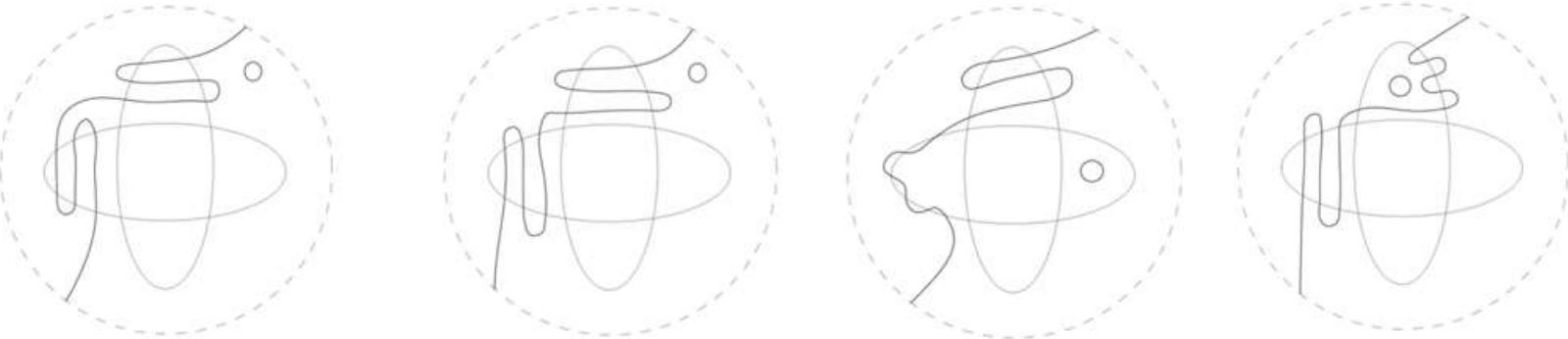


Рис.19. Реализованные схемы

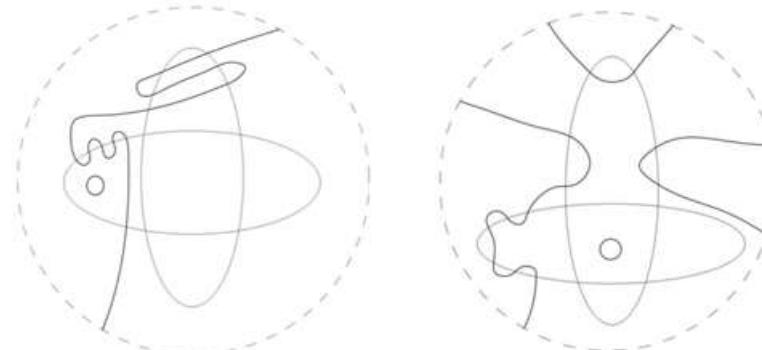


Рис.20. Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт

# Перечисление допустимых топологических моделей

3. Горская В.А. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. 2022. 23:3(184). С. 61-76.

В дополнение к условиям (i) – (iv) предполагается выполненным условие:

(v) точки пересечения нечётной ветви с разными кониками перемежаются, т. е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем — со второй.

# Результат

**Теорема 3.** Топологические модели кривых рассматриваемого класса (т. е. удовлетворяющих условиям (i) – (v)), отличные от показанных на рис. 21 и 22, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих четырнадцати моделей первые девять (рис. 21) реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости пяти оставшихся (рис. 22) открыт.

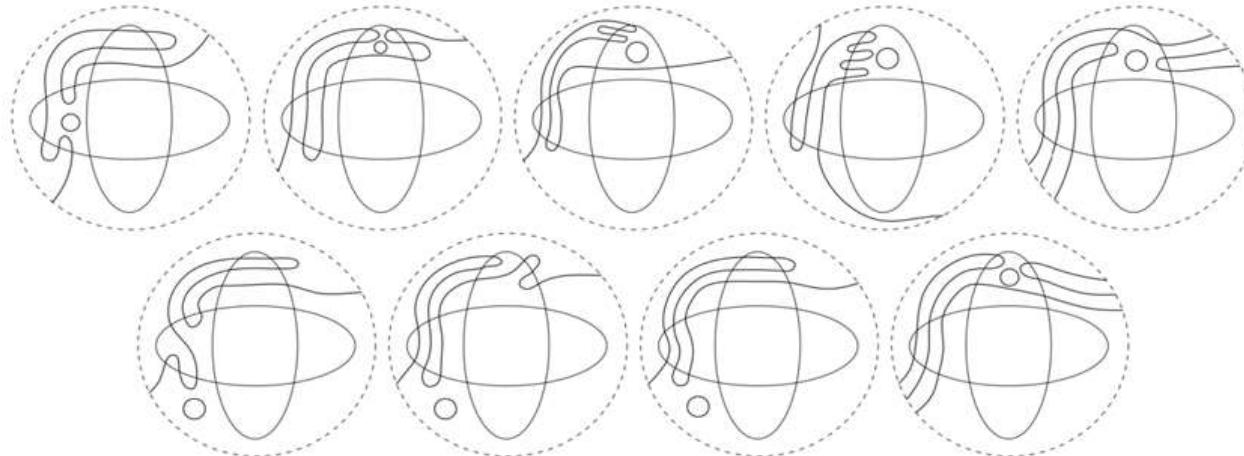


Рис.21. Реализованные схемы

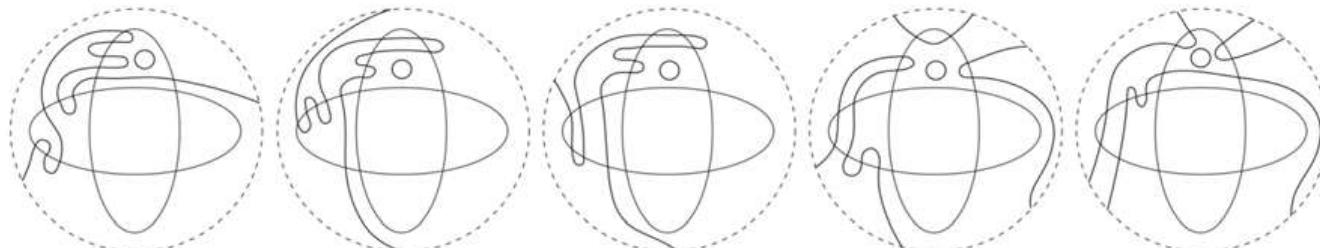


Рис.21. Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт