

Теорема Стоуна - фон Неймана

$$1^{\circ} [q, p] = qp - pq = iI \quad \text{к.к.с.}$$

2^o $\exists \psi_0$ - циклический
для q или p .

Тогда представление у.э.
н. Шредингера

$$q p - p q = i$$

$$q^2 p = q(i + p q) = 2i q + p q^2$$

$$\vdots$$

$$[q^n, p] = n q^{n-1} i$$

$$[q, p^n] = n p^{n-1} i$$

$$[q, f(p)] = f'(p) i$$

$$f(x) = \exp(-itx)$$

$$[q, e^{-itP}] = t e^{-itP}$$

$$e^{itP} q e^{-itP} = q + t, \quad \forall t$$

$$q = \int_{\text{Spect}(q)} x dP(x)$$

$$P(B_1)P(B_2) = 0$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$P(B+t) = P(B) \quad (\psi_0, f(A)\psi_0) = \int f(x) d\mu(x)$$

$$e^{-itP} P(B) e^{itP} = P(B+t)_{\text{Spec } A}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$B = (-\infty, x]$$

$$q \approx \int_{\mathbb{R}} x d\chi(x)$$

$$[\chi(B)f](x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

$$A\psi_0 \rightarrow x f_0$$

ККС в форме Вейля

$$W(x, y) = \exp(i x q + i y p)$$

Ф-ла Кемпбелла — $X_{ay} = g_{ap} p$

$$\exp(i x q + i y p) = \exp(i x q) \exp(i y p) \times e^{i \frac{x y}{2}}$$

$$W(x, y)W(x', y') =$$

$$= e^{i(xy' - x'y)} W(x', y')W(x, y)$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow W(x, y) \quad \mathbb{R}^2 \ni (x', y') \longrightarrow W(x', y')$$

проективное

у.п.

$\mathbb{R}^2$

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

Пред. ККС в

форме Вейля

$$e^{iyP} = e^{y \frac{d}{dz}}$$

$$\psi \in L^2(\mathbb{R})$$

$$[e^{iyP}\psi](z) = \psi(z+y)$$

Квантовое преобр. Фурье
 $\mathbb{S}_2(\mathcal{H})$ - гр-во опер, Γ -W
 $\mathbb{S}_1(\mathcal{H})$ - гр-во глгл, от.

$$\mathcal{G}_2(\mathcal{H})$$

$$\sum_j \lambda_j^2 < +\infty$$

$$\mathcal{G}_1(\mathcal{H})$$

$$\sum_j |\lambda_j| < +\infty$$

$$\langle T, S \rangle = \text{Tr}[TS^+]$$

$$\mathcal{G}_1(\mathcal{H}) \xrightarrow{\quad} L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\mathbb{U}$$

$$T \mapsto$$

$$F(x, y)$$

$$= \text{Tr}[T \cdot W(x, y)]$$

$$\mathbb{U}$$

$$T \mapsto$$

$$F(x, y)$$

$$= \text{Tr}[T \cdot W(x, y)]$$

$$\mathbb{U}$$

$$T \mapsto$$

$$F(x, y)$$

$$= \text{Tr}[T \cdot W(x, y)]$$

$$\mathbb{U}$$

$$T \mapsto$$

$$F(x, y)$$

$$= \text{Tr}[T \cdot W(x, y)]$$

Teorema.

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} F_T(x, y) \overline{F_S(x, y)} dx dy = \text{Tr}(TS)$$

$$T = \sum_j (\cdot, f_j) g_j$$

$$\bigcap_1 (\mathcal{H}) \rightarrow \sum_j \|f_j\| \|g_j\| < +\infty$$

Квантовое состояние

$$\rho \in \mathcal{G}_1(\mathcal{H}), \rho \geq 0, \text{Tr} \rho = 1$$

$$(\rho f, f) \geq 0$$

$$(\rho f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x, y) f(y) dy, \\ f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\text{Tr}_1(\mathcal{H})' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\text{Tr}(\rho_W(x, y)) \equiv$$

$$\rho_f = \int \rho(x, y) f(y) dy$$

$$\text{Tr}(\rho) = \int \rho(x, x) dx$$

$$\rho(x, y) \equiv \psi(x) \overline{\psi(y)}$$

$$\textcircled{=} \int e^{ixz} \rho\left(z + \frac{y}{2}, z - \frac{y}{2}\right) dz \equiv F_p(x, y)$$

$$\|\rho\|^2 = \iint |\rho(z, h)|^2 dz dh$$

F_p - квантовая x, ϕ
 $\downarrow$ преобр. ϕ ,

$V(x, y)$ - ф-ла Вунтера